Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 183-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__183_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Potentiel de volume. Propriétés caractéristiques.*

II. *Discussion du roulement de deux roues avec bielle sur un plan incliné.* (Juin 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Définition des lignes de tourbillon dans un milieu continu en mouvement. Leurs propriétés lorsqu'il existe une fonction des accélérations.*

II. *Un solide mobile autour d'un axe est soumis :* 1° *à une force dont le moment est proportionnel à l'écart angulaire* u *qui existe entre la position actuelle du corps et sa position d'équilibre et de sens contraire au sens de cet écart;* 2° *à une résistance dont le moment est proportionnel à la vitesse angulaire ;* 3° *à une force fonction du temps* t*, soit* $F(t)$ *cette fonction continue et périodique de période* θ.

On demande les conditions que doivent remplir l'écart initial u_0 *et la vitesse angulaire initiale* ω_0 *pour que le mouvement du solide soit rigoureusement périodique.*

On étudiera en particulier les cas suivants.

Premier cas :

$$F(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta}\right).$$

Deuxième cas :

$$\begin{aligned} F(t) &= B \quad \text{pour} \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon, \\ F(t) &= 0 \quad \text{pour} \quad -\theta < t < -\varepsilon \text{ et } \varepsilon < t < \theta, \end{aligned}$$

A *et* B *étant deux constantes non nulles et* ε *une constante moindre que* θ. (Novembre 1906.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un mouvement pendulaire troublé simultanément :*

1° *Par une résistance proportionnelle à la vitesse;*

2° *Par un frottement constant.*

Lorsque la première résistance agit seule, on observe un mouvement oscillatoire amorti dans lequel l'amplitude diminue de moitié après 3600 *oscillations simples.*

Lorsque la deuxième résistance agit seule, on sait que la demi-amplitude diminue à chaque demi-oscillation d'une quantité constante $2f$.

Les deux résistances agissant simultanément, le mobile est écarté de sa position d'équilibre d'un écart initial u_0 *tel que*

$$\frac{f}{u_0} = \frac{1}{1000000}.$$

On demande de calculer le nombre n *d'oscillations simples qui seront exécutées jusqu'à l'extinction du mouvement.* (Novembre 1906.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un ellipsoïde* E *de révolution se déforme de la façon suivante :* 1° *l'axe ne change ni en grandeur, ni en direction, ni en position;* 2° *le rayon de l'équateur croît proportionnellement au temps;* 3° *chaque point de la surface de* E *reste dans un méridien fixe et à une distance invariable du plan de l'équateur.*

Un point M, *de masse* m, 1° *est astreint de glisser sans frottement sur la surface* E, 2° *est repoussé par l'axe suivant une force perpendiculaire à cet axe et proportionnelle à la distance de* M *à l'axe.*

Étudier le mouvement de M. *Cas particulier où la vitesse initiale est tangente au méridien initial.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient :*

H, *une hélice tracée sur un cylindre de révolution;*

M, *un point qui se meut sur* H, *de façon que l'arc* s *de* H, *compté jusqu'en* M *à partir d'un point fixe* M_0, *soit égal au temps* t, *compté à partir d'un certain instant initial,* $s = t$;

MX, *la tangente en* M *à* H, *dirigée dans le sens des arcs croissants;*

MY, *la normale principale, dirigée vers le centre de courbure;*

MZ, *la binormale;*

C, *un corps solide, invariablement lié au trièdre trirectangle* MXYZ.

1° *Quel est l'axe instantané* I *de rotation et de glissement? comment se comporte* I *vis-à-vis d'un spectateur entraîné dans le mouvement? à quoi se réduit, pour un pareil spectateur, le mouvement?*

2° *Quel est le lieu* Γ *des points de* C *dont la vitesse passe par* M ?

3° *Un point* P *se meut dans l'espace de façon que sa vitesse absolue soit un vecteur équipollent au vecteur* ω, *qui représente la rotation instantanée de* C, *au même instant. On donne la position initiale* P_0 *de* P. *Quelle courbe* γ *est décrite par* P *dans* C ?

4° *Il existe des points de* C *pour lesquels l'accélération d'entraînement est nulle. Que devient* γ *quand* P_0 *est un pareil point? Lieu des points de* C *pour lesquels l'accélération a une grandeur donnée fixe.*

5° *Étendre les problèmes* 1° *et* 2° *au cas où* H *est tracée sur un cylindre quelconque.* (Juillet 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On a une roue, de rayon* a, *formée par une circonférence solide, pesante, homogène, d'épaisseur (section) négligeable et de densité linéaire* K. *La circonférence est reliée au centre* O *par des rayons rigides de masse négligeable. Un poids* $Q = mg$ *est appliqué au centre* O.

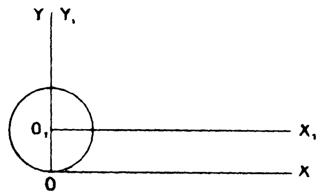
Au début du mouvement, la roue est lancée de manière à remonter, en roulant sans glisser, le long de la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné sur l'horizon d'un angle α.

A partir de ce moment, on applique, à un point déterminé M_1 *de la roue, une force* F, *d'intensité constante, mais dirigée dans le sens du mouvement et suivant la tangente en* M_1 *à la roue.*

On suppose que la roue ne peut jamais, par rapport au plan, que rouler sans glisser.

Étudier le mouvement.

Épreuve pratique. — *Dans un plan fixe* Π, *un cercle de rayon a roule sans glisser sur une droite indéfinie* OX. *Le*



cercle tourne autour de son centre avec une vitesse angulaire égale à 1.

Le cercle entraîne dans le mouvement son plan Π_1, *lequel, par suite, glisse sur le plan fixe* Π.

Un point P *se meut dans le plan mobile* Π_1.

Quelle courbe doit décrire P *dans* Π_1 *pour que la vitesse absolue de* P *soit un vecteur égal et directement opposé au vecteur, qui est la vitesse d'entraînement du même point* P ? *On cherchera les coordonnées relatives de* P *en fonction :* 1° *du temps* t, 2° *des coordonnées relatives initiales* α *et* β, *pour* $t = 0$.

Quelle courbe décrit alors P *dans le plan* Π ?

On vérifiera que, si Q *est un second point, qui se meut d'après une loi analogue à celle pour* P, *la distance* PQ *reste constante. Il en résulte que* P, Q, ... *sont les différents points d'un plan* Π_2 *qui glisse sur* Π_1 *et, par suite, aussi sur* Π.

Dans le mouvement de Π_2 *sur* Π, *quelles sont les roulettes ?*

On suppose que, pour $t = 0$, *les axes fixes* X, O, Y *et mobiles* X_1, O_1, Y_1 *sont disposés comme l'indique la figure.*

(Novembre 1906.)

Nancy.

Épreuve théorique. — *Un ellipsoïde homogène de révolution se meut dans un fluide incompressible homogène indéfini en repos à l'infini; à l'instant initial, on lui a imprimé une rotation autour de son axe de révolution* Oz *et une translation le long de ce même axe* Oz; *les forces données se réduisent à zéro.*

On demande d'étudier le mouvement du centre O de l'ellipsoïde et le mouvement de l'ellipsoïde autour de son centre. (Juin 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Application du principe de d'Alembert à la théorie des percussions.*

II. PROBLÈME. — *Un corps solide pesant est assujetti à se mouvoir d'un mouvement hélicoïdal de pas donné* $2l\pi$, *dont l'axe est vertical.*

Étudier l'effet d'une percussion sur ce corps. Calculer en fonction de la percussion considérée : 1° *l'accroissement de la vitesse angulaire ;* 2° *les percussions de liaisons.*

On suppose le corps primitivement au repos, et la vitesse résultant de la percussion dirigée de telle façon que le corps s'élève. Étudier le mouvement continu subséquent et déterminer la hauteur à laquelle le corps montera.

On néglige le frottement.

Application au cas où le corps considéré est un cylindre de révolution homogène, creux, ayant pour axe de figure l'axe du mouvement.

EPREUVE PRATIQUE. — *D'une origine* O *on veut lancer un mobile pesant de manière à atteindre un point* A *déterminé par son abscisse* a *(horizontale) et sa cote* b *(verticale) rapportées à l'origine* O. *Déterminer la vitesse initiale minima nécessaire et l'angle de cette vitesse avec l'horizontale.*

Application :

$$a = 4^{\text{m}}.$$
$$b = 3^{\text{m}},$$
$$g = 9^{\text{m}},81 \text{ par seconde.}$$

NOTA. — *On néglige toutes résistances de milieu.*

(Novembre 1906.)