Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 176-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__176_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère tous les cercles* C *passant par deux points fixes placés sur* Oz *symétriquement par rapport à* O. *Leurs équations générales sont*

$$y - \alpha x = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\beta x - a^2 = 0,$$

α *et* β *étant deux paramètres arbitraires.*

Supposant $\beta = f(\alpha)$:

1° *Démontrer que les cercles* C *de la famille ainsi déterminée sont les caractéristiques (au sens de la théorie des enveloppes) d'une famille de sphères* S. *Équation générale de ces sphères* S. *Il y a exception pour certaines fonc-*

tions f. Expression générale de ces fonctions f exceptionnelles.

2° *Supposant que f ne soit pas une de ces fonctions exceptionnelles, déterminer les lignes de courbure de la surface engendrée par la famille de cercles* C.

3° *Déterminer f de façon que le lieu des centres des sphères* S *soit la courbe $x = F(y)$ du plan des xy. Appliquer au cas particulier $x = y^2$.*

SOLUTION.

1° Les sphères sont

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\beta - \alpha\beta')x - 2\beta' y - a^2 = 0,$$

$$\beta' = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

Il y a exception quand β est linéaire en α.

2° Les lignes de courbure sont les cercles et leurs trajectoires orthogonales.

3° On est conduit à l'équation de Clairaut :

$$\beta - \alpha \frac{d\beta}{d\alpha} = F\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

dont il faut prendre la solution singulière qui est, dans le cas particulier,

$$\beta = -\frac{\alpha^2}{4}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Oxy étant deux axes rectangulaires et Δ la droite ayant pour équation $x = 1$, on considère toutes les paraboles* P *tangentes en* O *à* Ox *et ayant* Oy *pour axe. Chaque parabole* P *rencontre Δ en un point* M.

Déterminer les paraboles P *pour lesquelles l'intégrale curviligne*

$$\int \left[\frac{y(x-2)^2(x^2+2x+2)+x^2(x+1)^2}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}\,\frac{y}{x} - 6\log y\right]dx$$
$$+ \frac{6x^4-24x^3+24x^2+1}{2x(x-2)^2}\,dy$$

étendue à l'arc OM *de la parabole* P *est maxima ou minima.* (Juin 1906.)

Lyon.

Épreuve théorique. — I (Fonctions elliptiques).

1° *Soient :*

$\wp u$ *la fonction de Weierstrass;*

2ω *et* $2\omega'$ *les deux périodes, telles que* 2ω *et* $\frac{2\omega'}{i}$ *soient des quantités positives;*

u *un argument réel et positif;*

$e_1 = \wp\omega,\ e_3 = \wp\omega',\ e_2 = \wp(\omega+\omega'),\ e_1 = 1 + e_3;$

$\frac{1}{\operatorname{sn} u}$ = *la racine carrée arithmétique de* $\wp u - e_3$.

Exprimer e_1, e_2, e_3 *à l'aide du module* k *relatif à* $\operatorname{sn} u$*; exprimer* $\sqrt{\wp u - e_1}$ *et* $\sqrt{\wp u - e_2}$ *en fonction de* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

2° *Soit la courbe* C *définie par les équations (coordonnées rectangulaires)*

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \wp(u+a) + \wp(u-a) \\ 2y &= \wp(u+a) - \wp(u-a) \end{aligned}\right\} \quad a = \textit{réel}.$$

Quel est le degré de C*? à quelle condition les quatre points* u_1, u_2, u_3, u_4 *de* C *sont-ils sur une même circonférence de cercle ?*

Nommons :

M *un point de* C;

E_1, E_2, E_3 *les trois points*

$$x = e_1, \quad y = 0; \qquad x = e_2, \quad y = 0; \qquad x = e_3, \quad y = 0;$$

r_1, r_2, r_3 *les trois distances* ME_1, ME_2, ME_3.

Exprimer r_1, r_2, r_3 *à l'aide de* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, *et montrer que* r_1 *et* r_3 *sont liées par une relation linéaire.*

II. *Calculer l'aire convexe de l'ellipsoïde de révolution*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$$

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$pq = x + y, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Donner une méthode pour obtenir celles des surfaces intégrales qui passent par l'origine des coordonnées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit, en coordonnées rectangulaires, la surface* S :

$$x = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \cos v,$$

$$y = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \sin v,$$

$$z = u.$$

1° *Construire les courbes* C, $v = f(u)$, *telles que la tangente fasse avec l'axe des* z *un angle constant* α,

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{2}.$$

2° *Par un point* M *de* S *passent deux courbes* C. *Calculer les cosinus directeurs des deux normales principales et leurs angles avec la surface.*

3° *Calculer les rayons de courbure et de torsion pour la courbe* C.

SOLUTION.

Les problèmes I, II, III sont des applications immédiates du cours. Passons à l'épreuve pratique.

L'équation des courbes C est

$$\text{const.} + v = \int \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^2 + \frac{1}{2}} du.$$

On est ramené à une quadrature très simple en posant $1 + u^2 = (u + w)^2$, puis $w^2 = t$. La surface S est un hyperboloïde de révolution autour de l'axe des z et à une nappe.

(Juillet 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer l'intégrale* $(z = x + iy)$

$$\int \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}} dz}{z + 1},$$

prise le long d'une circonférence de rayon 2, *avec le centre* *à l'origine et dans le sens direct. Résidu de la fonction sous le signe* $\int$ *pour* $z = \infty$.

II. *Calculer, par la théorie des résidus, l'intégrale* (x *réel*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4},$$

et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{2(1+\cos^2 x)}\,dx$.

III. *Soient :*

z *une variable complexe;*
$\lambda(z)$ *une fonction rationnelle;*
$\mu(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} \lambda(z)\,dz;\ u(z) = \int_{z_0}^{z} e^{\mu(z)}\,dz;$
$z = a$ *un pôle de* $\lambda(z)$.

1° *Quand* a *est-il, pour* $u(z)$, *un point ordinaire, un pôle, un point singulier logarithmique* (*mais non un point singulier essentiel*)?

2° *Quand* $z = \infty$ *est-il, pour* $u(z)$, *un point ordinaire?*

II. 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j};\ j = 1, 2, 3, 4\right)$$

$$0 = p_1(x_1 + x_2) + p_2(x_3 + x_3) + p_3(x_3 + x_4) + p_4 x_4.$$

2° *La circonférence* (*coordonnées rectangulaires*)

$$y = 0, \qquad z^2 + (x-1)^2 = 4$$

tourne autour de l'axe des z *et engendre un tore. Calculer l'aire convexe et le volume du tore.*

Épreuve pratique. — *Soient* (*coordonnées rectangulaires*) u *et* v *deux paramètres, et* a *une longueur fixe donnée;*

S *la surface*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av$$

1° *Trouver les lignes asymptotiques de* S.

2° *Calculer, pour la courbe* $u = av$ *de* S, *la courbure, la torsion, le trièdre de Serret, en un point.*

(Novembre 1906.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions de deux variables indépendantes soient liées par une relation.*

II. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^3}:$$

1° *Déterminer une solution particulière de la forme* $y = ax^2$;

2° *Intégrer l'équation;*

3° *Trouver les solutions particulières de la forme*

$$y = ax + b,$$

et retrouver en partant de là la solution générale.

III. *On considère les droites* D *représentées par les équations*

$$x = tz + p, \qquad y = pz + \frac{t^3}{3};$$

1° t *et* p *étant indépendants, combien de droites* D *réelles passent par un point de l'espace?*

2° *Comment doit-on choisir* p *en fonction de* t *pour que les droites* D *ainsi déterminées aient une enveloppe? Trouver pour une solution quelconque l'arête de rebroussement et la trace sur le plan* xOy *de la surface formée par ces droites. Lieu des arêtes de rebroussement.*

SOLUTIONS.

I. L'équation est une équation de Riccati; elle a la solution particulière $y = -x^2$, et sa solution générale est $y = \dfrac{1 - cx^2}{c - x}$;

les solutions du premier degré sont $y = \omega x + \omega^2$, ω étant une racine cubique de l'unité. La propriété du rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation fournit la solution générale.

II. Par un point (x, y, z) passent trois droites qui sont toutes trois réelles si y est extérieur aux ordonnées des deux surfaces (F)

$$3(xz - y) \pm 2z^3 = 0.$$

Pour que les droites aient une enveloppe, il faut prendre p égal à $\frac{\varepsilon t^2}{2} + c$, ε étant ± 1; la trace de la surface est la courbe $y^2 = \frac{8}{9}(x - c)^3$; son arête de rebroussement est la cubique

$$z = -\varepsilon t, \qquad x = \frac{-\varepsilon t^2}{2} + c, \qquad y = -c\varepsilon t - \frac{t^3}{6};$$

le lieu de ces arêtes est la surface focale dont les deux nappes ont les équations (F). (Juillet 1906.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y;$$

déterminer la solution z de cette équation qui se réduit pour $x = 1$ à une fonction donnée $f(y)$ de y. La solution dépend de la fonction $f(u)$, où u désigne le rapport $\frac{y}{x}$; comment faut-il choisir la fonction $f(u)$ pour que z satisfasse à l'équation proposée et à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \log x\right)^2 ?$$

II. *Centre et rayon de courbure d'une courbe gauche. On donne la courbe représentée par les équations*

$$x = a\sin^2 t, \qquad y = a\sin t\cos t, \qquad z = a\cos t,$$

où a est un nombre fixe et t un paramètre variable; le *plan normal passe constamment par l'origine; déterminer et construire le lieu des parallèles menées par l'origine aux tangentes à la courbe.* (Octobre 1906.)