

A. LAUREAUX

Divisions homographiques sur une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 167-169

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__167_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[P1a]

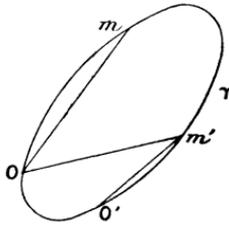
DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES SUR UNE CONIQUE ;

PAR M. A. LAUREAUX.

Cette question faisant partie de certains programmes, il m'a semblé utile de démontrer élémentairement, c'est-à-dire en introduisant le moins possible les imaginaires, le théorème fondamental : *la droite joignant les points homologues enveloppe une conique*.

On sait que deux points m, m' décrivent sur une conique γ des divisions homographiques si en les joignant

Fig. 1.



à un point fixe O les faisceaux Om, Om' sont homographiques.

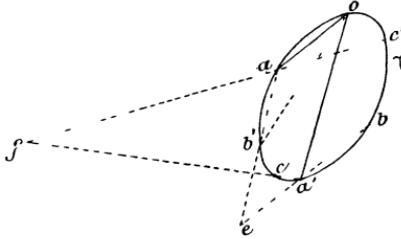
Il en résulte que, si l'on remplace O par O' , la propriété subsiste. De même $O'm, O'm'$ sont homographiques.

Je dis que mm' enveloppe une conique bitangente à γ .

Construisons les rayons doubles. Pour cela, nous considérons trois couples de rayons homologues (*fig. 2*) : $oaod', obob', ococ'$; ab' coupe $a'b$ en e , ac' coupe $a'c$ en f , ef coupe γ aux points doubles cherchés (construction classique).

1° ef ne coupe pas γ . Projetons en prenant un centre S sur un plan parallèle au plan Sef . Nous

Fig. 2



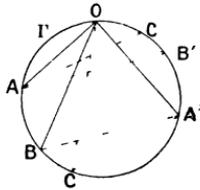
obtenons une conique γ' ne coupant pas la droite de l'infini, c'est-à-dire une ellipse que nous projetons *cylindriquement* suivant un cercle Γ .

Soient (*fig. 3*) A, B, C, A', B', C' les points qui correspondent à a, b, c, a', b', c' ; AA', BB', CC' sont parallèles, d'où

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$$

L'homographie est déterminée par un angle constant

Fig. 3.



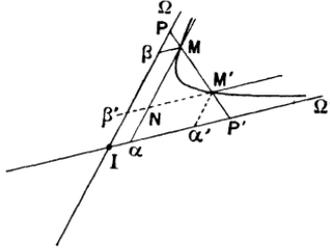
de sommet O ; les droites $AA', BB' \dots$ enveloppent un cercle concentrique.

2° ef coupe γ en $\omega\omega'$. Projetons encore ef à l'infini, nous obtenons une hyperbole d'asymptotes $I\Omega, I\Omega'$. A deux points homologues m, m' correspondent M, M' ; MM' coupe les asymptotes en P, P' .

Menons les parallèles aux asymptotes par MM' .

$M'\beta'$ et $M\alpha$ sont homographiques et se coupent en N qui décrit une hyperbole ayant les mêmes asymptotes,

Fig. 4.



d'où

$$\bar{I\alpha} \cdot \bar{I\beta'} = K, \quad \bar{I\alpha} \cdot \bar{I\beta} = \bar{I\alpha'} \cdot \bar{I\beta'} = K'.$$

Les triangles βPM et $\alpha' M' P'$ sont égaux, d'où

$$IP = I\beta + \alpha' M' = I\beta + I\beta', \quad IP' = I\alpha' + I\alpha$$

$$IP \cdot IP' = (I\beta + I\beta')(I\alpha + I\alpha') = 2K' + K + \frac{K'^2}{K} = \text{const.}$$

P, P' décrivent deux divisions homographiques et PP' enveloppe une conique tangente à $I\Omega$ et $I\Omega'$, visiblement à l'infini.