A. LAUREAUX

Divisions homographiques sur une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 167-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__167_0>

[P1a]

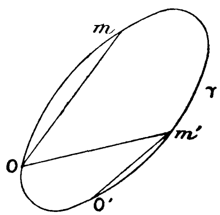
DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES SUR UNE CONIQUE;

Par M. A. LAUREAUX.

Cette question faisant partie de certains programmes, il m'a semblé utile de démontrer élémentairement, c'est-à-dire en introduisant le moins possible les imaginaires, le théorème fondamental : *la droite joignant les points homologues enveloppe une conique.*

On sait que deux points m, m' décrivent sur une conique γ des divisions homographiques si en les joignant

Fig. 1.



à un point fixe O les faisceaux Om, Om' sont homographiques.

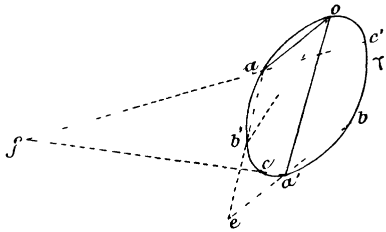
Il en résulte que, si l'on remplace O par O', la propriété subsiste. De même Om, O'm' sont homographiques.

Je dis que mm' enveloppe une conique bitangente à γ.

Construisons les rayons doubles. Pour cela, nous considérons trois couples de rayons homologues (*fig.* 2) : $oaoa'$, $obob'$, $ococ'$; ab' coupe $a'b$ en e, ac' coupe $a'c$ en f, ef coupe γ aux points doubles cherchés (construction classique).

1° ef ne coupe pas γ. Projetons en prenant un centre S sur un plan parallèle au plan Sef. Nous

Fig. 2



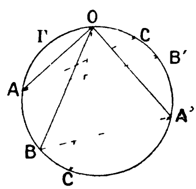
obtenons une conique γ' ne coupant pas la droite de l'infini, c'est-à-dire une ellipse que nous projetons *cylindriquement* suivant un cercle Γ.

Soient (*fig.* 3) A, B, C, A′, B′, C′ les points qui correspondent à a, b, c, a', b', c'; A B′, A′ B, A C′, A′ C sont parallèles, d'où

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$$

L'homographie est déterminée par un angle constant

Fig. 3.



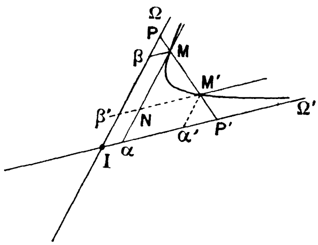
de sommet O; les droites AA′, BB′ ... enveloppent un cercle concentrique.

2° ef coupe γ en $\omega\omega'$. Projetons encore ef à l'infini, nous obtenons une hyperbole d'asymptotes IΩ, IΩ′. A deux points homologues m, m' correspondent M, M′; MM′ coupe les asymptotes en P, P′.

Menons les parallèles aux asymptotes par MM′.

$M'\beta'$ et $M\alpha$ sont homographiques et se coupent en N qui décrit une hyperbole ayant les mêmes asymptotes,

Fig. 4.



d'où

$$\overline{I\alpha}.\overline{I\beta'} = K, \qquad \overline{I\alpha}.\overline{I\beta} = \overline{I\alpha'}.\overline{I\beta'} = K'.$$

Les triangles βPM et $\alpha' M' P'$ sont égaux, d'où

$$IP = I\beta + \alpha' M' = I\beta + I\beta', \qquad IP' = I\alpha' + I\alpha$$

$$IP.IP' = (I\beta + I\beta')(I\alpha + I\alpha') = 2K' + K + \frac{K'^2}{K} = \text{const.}$$

P, P′ décrivent deux divisions homographiques et PP′ enveloppe une conique tangente à $I\Omega$ et $I\Omega'$, visiblement à l'infini.