NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES REMOUNDOS

Sur les forces centrales multiformes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 163-166

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__163_1>

[R7b]

SUR LES FORCES CENTRALES MULTIFORMES;

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

1. D'après une formule classique, l'intensité d'une force centrale est donnée par l'expression suivante :

$$F = -m \frac{c^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right], \tag{1}$$

où r et θ désignent les coordonnées polaires, le centre de la force étant pris comme pôle, m désigne la masse du mobile et c la constante des aires.

Cette formule nous montre que la force F s'exprime rationnellement par le rayon polaire r et ses dérivées (première et seconde) par rapport à l'angle polaire θ; c'est là un fait qui entraîne des conséquences intéressantes concernant la position des trajectoires dans le cas où la force F est donnée par une fonction multiforme de la position du mobile, que je me propose de faire connaître dans cette Note.

2. Donnons-nous des conditions initiales déterminées et considérons la trajectoire correspondante T. Il est facile de voir que sur cette trajectoire le rayon polaire r et les dérivées $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$ ne dépendent que de la position du mobile sur la trajectoire, pourvu que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe. Nous avons, en effet, les formules

$$(2)\qquad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\operatorname{tang}\varphi}, \qquad \rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta}},$$

φ désignant l'angle de la tangente de la trajectoire avec le rayon polaire et ρ le rayon de courbure de la trajectoire; ces formules montrent bien notre lemme, parce qu'il n'y figure que des fonctions trigonométriques de l'angle φ. On s'en rend mieux compte par une facile élimination entre les formules (1), (2) et celle qui donne la vitesse V du mobile sollicité par la force centrale en coordonnées polaires; cette élimination nous conduit à l'expression suivante de l'intensité de la force centrale [1]:

$$(3)\qquad F = -\frac{m}{c}\,\frac{rV^3}{\rho},$$

qui prend aussi la forme suivante :

$$(4)\qquad F = mc^2\,\frac{r}{\rho P^3},$$

[1] *Voir* une Note de Resal (*Comptes rendus*, t. XC, p. 769) contenant un théorème relatif à cette formule (3).

si nous tenons compte de la formule classique

$$PV = c,$$

où P désigne la distance du pôle (centre de force) à la tangente de la trajectoire. Cette formule nous montre d'une façon immédiate le fait que l'intensité ne dépend sur une trajectoire fixe que de la position du mobile, pourvu que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe de la trajectoire.

L'exclusion des points multiples est bien naturelle, parce qu'en ces points les quantités géométriques ρ et P pourraient bien avoir plusieurs valeurs.

3. Le lemme ci-dessus indiqué, si simple et si facile à rendre visible, est susceptible d'applications importantes, dans le cas où la force F est donnée par une fonction multiforme de la position du mobile, concernant l'allure et la position de la trajectoire. Supposons, par exemple, que la force F soit donnée par la fonction suivante :

$$F = f(r, \theta),$$

admettant un point critique (r_0, θ_0) et un seul. Nous avons, alors, le fait intéressant suivant: *Aucune trajectoire du mobile ne saurait renfermer le point* (r_0, θ_0).

Nous nous bornerons à citer les applications suivantes, qui découlent immédiatement de la proposition ci-dessus conclue :

Si la fonction $f(r, \theta)$ n'est pas périodique par rapport à θ avec une période égale à 2π, aucune trajectoire fermée ne saurait entourer le pôle (centre de la force). En effet, dans le cas contraire, la force ne dépendrait pas seulement de la position du mobile sur chaque trajectoire, puisque à chaque position

$$(r, \theta + 2K\pi)$$

la force aurait plusieurs valeurs données par la formule

$$f(r, \theta + 2K\pi),$$

et correspondant aux diverses valeurs de l'entier K; la force prendrait ces valeurs dans les divers passages du mobile par une certaine position de la trajectoire. Supposons aussi que la force F soit donnée par une fonction $\varphi(x, y)$ harmonique par rapport aux coordonnées x et y et désignons par $\sigma(z) + C$ l'ensemble des fonctions analytiques formées par la combinaison de la fonction $\varphi(x, y)$ avec ses conjuguées. Si la fonction $\varphi(x, y)$ admet des points singuliers qui soient des points critiques des fonctions analytiques $\sigma(z) + c$, aucune trajectoire ne saurait entourer un point (un seul) critique commun des fonctions $\sigma(z)$ et $\varphi(x, y)$, parce que la permutation des déterminations de la fonction analytique $\sigma(z) + c$ entraînerait celle des déterminations de la fonction $\varphi(x, y)$, c'est-à-dire de la force F.

Je ne me suis servi de la fonction $\sigma(z)$ que pour donner une expression plus claire du résultat. Nous pourrions bien dire aussi qu'aucune trajectoire ne saurait renfermer un point critique unique de la fonction $\varphi(x, y)$, en entendant par *point critique* un point autour duquel la fonction $\varphi(x, y)$ change de détermination.

En général, la connaissance des singularités de la fonction donnant la force centrale nous permet de conclure l'impossibilité de quelques courbes comme trajectoire, quelles que soient les conditions initiales.