Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur le théorème de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 158-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__158_1>

[K2e, K2c]

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. G. FONTENÉ.

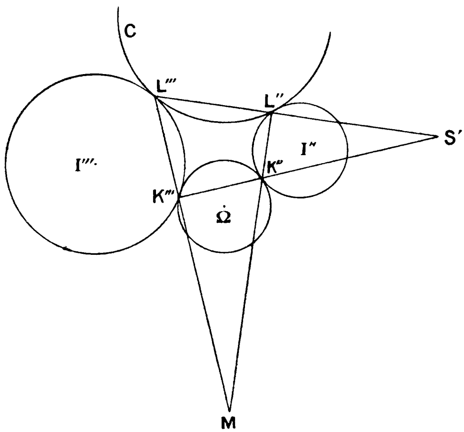
1. Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1850, M. Mention a fait observer qu'une construction donnée par Cauchy (lorsqu'il était élève à l'École Polytechnique) pour le problème du cercle tangent à deux cercles et passant par un point donné M, se simplifie singulièrement lorsque le point M appartient à l'axe radical des deux cercles : *on voit alors apparaître une tangente commune à ces deux cercles;* et il a eu l'idée très heureuse de rattacher à cette construction le théorème de Feuerbach. La démonstration aujourd'hui

classique de ce théorème par l'inversion [1] fait précisément intervenir la tangente commune dont se sert M. Mention.

Il m'a paru intéressant de reprendre cette démonstration avec les ressources de la théorie actuelle des cercles tangents à deux cercles; j'ai d'ailleurs considéré les cercles I'' et I''' exinscrits dans les angles B et C, afin d'avoir une figure très claire, mais il va sans dire qu'un raisonnement analogue est applicable au cercle inscrit I et au cercle I' exinscrit dans l'angle A.

2. Considérons (*fig.* 1) deux cercles I'' et I''', un

Fig. 1.



cercle Ω qui leur est tangent, les contacts étant de même espèce, un cercle C qui leur est également tangent dans les mêmes conditions; soient K'' et K''' les points de contact pour le cercle Ω, L'' et L''' les points

---

[1] De qui est cette démonstration? Je croyais l'avoir vue dans les *Nouvelles Annales*, mais je n'ai pas pu la retrouver.

de contact pour le cercle C. D'une part, le point d'intersection S' des droites $K''K'''$ et $L''L'''$ est le centre de similitude directe des cercles I'' et I''', et la puissance de ce point relativement à chacun des deux cercles Ω et C est égale à la puissance d'inversion des cercles I'' et I''', de sorte que le point S' appartient à l'axe radical des cercles Ω et C. D'autre part, et d'une manière analogue, le point d'intersection M des droites $K''L''$ et $K'''L'''$ est un centre de similitude (directe dans le cas de la figure) pour les cercles Ω et C, et ce point appartient à l'axe radical des cercles I'' et I'''.

Si l'on substitue au cercle C une tangente commune extérieure relative aux cercles I'' et I''', le point M, toujours situé sur l'axe radical de ces deux cercles, se trouve sur le cercle Ω puisqu'il est pôle d'inversion de ce cercle et de la tangente commune, et la tangente en ce point est parallèle à la tangente commune $L''L'''$. On arrive à ce théorème :

Théorème. — *Les cercles tangents à deux cercles* I'' *et* I''', *les contacts étant de même espèce, peuvent être caractérisés comme il suit :*

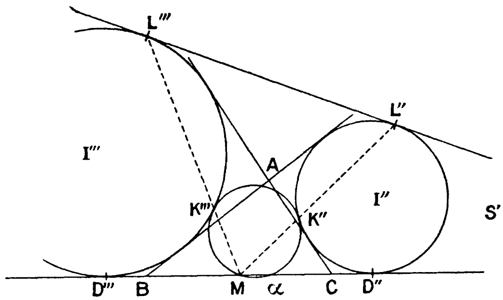
1° *La puissance du point* S', *centre de similitude directe des cercles* I'' *et* I''', *par rapport aux cercles considérés, est égale à la puissance d'inversion des deux cercles* I'' *et* I''' ;

2° *Aux deux points d'intersection de l'un des cercles considérés avec l'axe radical des cercles* I'' *et* I''', *les tangentes sont parallèles aux tangentes communes extérieures relatives à ces deux cercles* (condition simple).

3. Corollaire. — *Le cercle des neuf points d'un triangle* ABC *est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

Ce cercle peut, en effet, être caractérisé comme il suit (*fig.* 2) :

Fig. 2.



1° Il passe au milieu M du côté BC, point qui appartient à l'axe radical des deux cercles exinscrits I'' et I''', et la tangente en ce point est antiparallèle à BC par rapport à l'angle A, ou parallèle à la seconde tangente commune extérieure L''L''' relative à ces deux cercles;

2° Ce cercle passe au pied de la hauteur Aα, et, si l'on désigne par S' le pied de la bissectrice de l'angle extérieur en A (centre de similitude directe des cercles I'' et I'''), par D'' et D''' les points de contact des cercles I'' et I''' avec le côté BC, le point α est le conjugué harmonique du point S' par rapport aux points D'' et D'''; cette division harmonique peut être traduite par la relation

$$\overline{S'M} \times \overline{S'\alpha} = \overline{S'D''} \times \overline{S'D'''},$$

qui exprime que la puissance du point S' par rapport au cercle des neuf points est égale à la puissance d'inversion des deux cercles I'' et I'''.

Le cercle des neuf points est donc tangent aux cercles exinscrits dans les angles B et C.

Les points de contact K'' et K''' sont situés sur les droites ML'' et ML'''.

4. L'axe radical des deux cercles I'' et I''' est la bissectrice de l'angle en M du triangle MNP, en appelant M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC. Le second point de rencontre de cet axe radical avec le cercle des neuf points est le milieu X' de l'arc supérieur $M\alpha$, et la tangente en ce point est parallèle à la tangente commune extérieure BC. Les points de contact K'' et K''' sont situés sur les droites $X'D''$ et $X'D'''$.

5. Si, revenant au cas général, on envisage la figure formée par le cercle Ω, le cercle C ou la tangente commune $L''L'''$, le cercle I'' qui touche le cercle Ω au point K'' et le cercle C ou la tangente commune au point L'', le cercle I''' qui les touche aux points K''' et L''', on voit que cette figure est sa propre inverse relativement au point M.

En ce qui concerne le théorème de Feuerbach, la démonstration classique de ce théorème par l'inversion résulte immédiatement de la détermination donnée plus haut pour le cercle des neuf points : il faut seulement traduire la division harmonique par la relation

$$\overline{MD''}^2 = \overline{MD'''}^2 = MS' \times M\alpha.$$

(Le point X' est de même un pôle d'inversion pour le cercle Ω et la droite BC, la puissance d'inversion étant la puissance de ce point par rapport au cercle I'' ou au cercle I''' ; il suit de là que les longueurs égales $X'M$ et $X'\alpha$ sont égales à la longueur de la tangente menée de X' au cercle I'' ou au cercle I'''. Cette propriété a été indiquée par M. Mannheim, dans le cas du point X milieu de l'arc inférieur Mα et des cercles I et I'.)

6. Les six axes radicaux des cercles I, I', I'', I''' considérés deux à deux sont les six bissectrices relatives au triangle MNP, de sorte que les centres radicaux de ces cercles considérés trois à trois sont les centres des cercles tangents aux trois côtés de ce même triangle ; ces quatre points forment un quadrangle orthogonal dont le cercle des neuf points est le cercle MNP, les milieux des six côtés du quadrangle étant d'ailleurs les points X et X', Y et Y', Z et Z'.