NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PELLET

Sur la sphère pédale et le cercle pédal

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 155-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__155_1>

[K2e, K13c]

SUR LA SPHÈRE PÉDALE ET LE CERCLE PÉDAL;

PAR M. A. PELLET.

1. En transformant par polaires réciproques, relativement à une sphère (à un cercle), le fait que la sphère (le cercle) circonscrite à un tétraèdre autopolaire par rapport à une quadrique (à un triangle autopolaire par rapport à une conique) coupe orthogonalement la sphère de Monge de cette quadrique (le cercle de

Monge de cette conique), on obtient le théorème suivant :

Les sphères pédales (cercles pédaux) d'un point relativement aux tétraèdres autopolaires d'une quadrique (triangles autopolaires d'une conique) coupent orthogonalement une sphère (un cercle). (*Nouvelles Annales*, 1875, p. 68 et 69.)

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ l'équation de la quadrique rapportée à ses axes; α, β, γ les coordonnées du point. La sphère a son centre dans le plan qui passe par les pieds de ces trois coordonnées :

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-2=0$$

et coupe orthogonalement les sphères qui passent par le point α, β, γ et le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire, qui a pour équations :

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z-\gamma}{\frac{\gamma}{c^2}}.$$

On a donc

$$\alpha_1=\alpha\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right),\qquad \beta_1=\beta\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right),\qquad \gamma_1=\gamma\left(1-\frac{\lambda}{c_2}\right)$$

avec

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-1=0,$$

et, pour l'équation de la sphère,

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-2\alpha_1x-2\beta_1y-2\gamma_1z&\\+\frac{\alpha_1^2a^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta_1^2b^2}{b^2-\lambda}+\frac{\gamma_1^2c^2}{c^2-\lambda}-\lambda&=0.\end{aligned}$$

Si $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$, auquel cas la quadrique est un hyperboloïde équilatère et λ infini, cette sphère se réduit au plan

$$\frac{2\alpha x}{a^2}+\frac{2\beta y}{b^2}+\frac{2\gamma z}{c^2}$$
$$-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0,$$

parallèle au plan polaire du point α, β, γ et passant par le milieu de la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire.

Remplaçant $\frac{1}{c^2}$ par 0, on a les valeurs correspondant à la conique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. On en déduit aisément, pour le paraboloïde $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$,

$$\alpha_1=\alpha+\frac{pq}{p+q},\qquad \beta_1=\frac{p\beta}{p+q},\qquad \gamma_1=\frac{q\gamma}{p+q};$$
$$x^2+y^2+z^2-2\alpha_1 x-2\beta_1 y-2\gamma_1 z$$
$$+\alpha^2+\beta^2\frac{p}{p+q}+\gamma^2\frac{q}{p+q}=0;$$

et, pour la parabole, $y^2=2px$,

$$\alpha_1=\alpha+p,\qquad \beta_1=0,$$
$$x^2+y^2-2(\alpha+p)x+\alpha^2=0=y^2-2px+(x-\alpha)^2=0,$$

équation d'un cercle bitangent à la parabole, la corde de contact étant la parallèle à la directrice menée par le point α, β.

2. Étant donné un triangle ABC, les points inverses par rapport à ce triangle situés sur une droite sont les points de contact des hyperboles équilatères conjuguées relativement au triangle, lesquelles passent par les centres des cercles inscrits et exinscrits, et tangentes à la droite.

Soient S un point du plan du triangle ABC, S′ son inverse, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Le cercle pédal des points S, S′ passe par les foyers des paraboles conjuguées au triangle ayant pour directrices OS, OS′, lesquels sont situés sur le cercle des neuf points et sont séparés par un arc correspondant à un angle au centre double de $\widehat{SOS'}$, et coupe orthogonalement le cercle bitangent à la parabole, ayant pour directrice la parallèle à SS′ menée par O, conjuguée au triangle ABC, la corde de contact étant SS′. [*Voir* dans les *Nouvelles Annales* (1905, 1906) les articles de MM. Fontené et Bouvaist sur le cercle pédal et le théorème de Feuerbach.]