NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HILAIRE

Démonstration d'un théorème attribué à Leibniz

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 151-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__151_0>

[K13a]

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME ATTRIBUÉ A LEIBNIZ;

PAR M. A. HILAIRE.

Dans une Note insérée au numéro de décembre 1906 (p. 553) j'ai rappelé, en vue d'un problème spécial, l'existence de ce théorème. Il se présente sous deux formes différentes que j'ai citées l'une après l'autre. La deuxième seule est énoncée et démontrée partout; quant à la première, elle est rarement énoncée et je n'en connais aucune démonstration courante. Il m'a paru intéressant de lui appliquer le procédé d'élimination très symétrique et très élégant dont M. Guichard s'est servi pour l'autre (*voir* son *Traité de Géométrie*, t. II, p. 179).

Je reproduis l'énoncé de la première forme.

A, B, ..., K, L étant n points, avec les coefficients α, β, ..., $\varkappa$, λ, T le centre des distances proportionnelles pour le système et τ la somme $\alpha + \beta + \ldots + \varkappa + \lambda$,

$$\tau \sum_1^n \alpha \overline{MA}^2 = \tau^2 \overline{MT}^2 + \sum_1^n \alpha\beta \overline{AB}^2.$$

Je traite d'abord le cas de deux points.

Soit T_1 le centre des distances proportionnelles pour les deux points A et B, avec les coefficients α et β; j'applique dans le triangle MAB, pour le point T_1, l'égalité de Stewart :

$$\overline{MA}^2.T_1B + \overline{MB}^2.T_1A = \overline{MT_1}^2.AB + AB.T_1A.T_1B;$$

j'y remplace T_1A et T_1B par leurs valeurs $\frac{\beta AB}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\alpha AB}{\alpha+\beta}$:

$$(\alpha+\beta)\left(\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2\right)=(\alpha+\beta)^2\overline{MT_1}^2+\alpha\beta\overline{AB}^2.$$

Je vais faire voir maintenant que, si le théorème est vrai pour $n-1$ points, il l'est encore pour n points.

A, B, ..., K étant les $n-1$ premiers points, avec les coefficients α, β, ..., $\varkappa$, T' le centre des distances proportionnelles pour le système et τ' la somme

$$\alpha+\beta+\ldots+\varkappa$$

(de sorte que $\tau'+\lambda=\tau$), j'ai, par hypothèse,

$$\tau'\sum_1^{n-1}\alpha\overline{MA}^2=\tau'^2\overline{MT'}^2+\sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2; \tag{1}$$

T étant, par définition, le centre des distances proportionnelles pour les deux points T' et L avec les coefficients τ' et λ, j'applique l'égalité pour le cas de deux points :

$$(\tau'+\lambda)\left(\tau'\overline{MT'}^2+\lambda\overline{ML}^2\right)=(\tau'+\lambda)^2\overline{MT}^2+\tau'\lambda\overline{T'L}^2,$$

ou, en développant,

$$\left\{\begin{aligned}&\tau'^2\overline{MT'}^2+\tau'\lambda\overline{MT'}^2+(\tau'+\lambda)\lambda\overline{ML}^2\\&\quad=(\tau'+\lambda)^2\overline{MT}^2+\tau'\lambda\overline{T'L}^2;\end{aligned}\right. \tag{2}$$

je récris l'égalité (1), en la multipliant par $\frac{\lambda}{\tau'}$:

$$\lambda\sum_1^{n-1}\alpha\overline{MA}^2=\tau'\lambda\overline{MT'}^2+\frac{\lambda}{\tau'}\sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2; \tag{3}$$

je récris l'égalité (3), en y remplaçant le point variable

M par le point L et en la renversant :

$$(4) \qquad \tau'\lambda\overline{LT'}^2 + \frac{\lambda}{\tau'}\cdot\sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2 = \lambda\sum_1^{n-1}\alpha\overline{LA}^2;$$

j'ajoute membre à membre les égalités (1), (2), (3) et (4), et je réduis :

$$(\tau'+\lambda)\left(\sum_1^{n-1}\alpha\overline{MA}^2 + \lambda\overline{ML}^2\right)$$
$$= (\tau'+\lambda)^2\overline{MT}^2 + \sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2 + \lambda\sum_1^{n-1}\alpha\overline{LA}^2;$$

finalement, et remplaçant $\tau'+\lambda$ par τ :

$$\tau\sum_1^{n}\alpha\overline{MA}^2 = \tau^2\overline{MT}^2 + \sum_1^{n}\alpha\beta\overline{AB}^2.$$

C. Q. F. D.