Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 133-141
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__133_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne les deux paraboles qui, dans un système d'axes rectangulaires, ont pour équations*

$$(z-a)^2 - 2px = 0, \qquad (z-b)^2 - 2qy = 0,$$
$$y = 0; \qquad\qquad z = 0.$$

Les droites s'appuyant sur ces courbes dépendent de deux paramètres. Si l'on établit entre ces paramètres une re-

lation convenable, les droites considérées engendrent une surface développable.

1° *Déterminer les surfaces développables ainsi obtenues;*

2° *Il existe une de ces surfaces développables qui ne se réduit pas, en général, à un cône. Soient* S *cette surface,* M *un point de l'arête de rebroussement de cette surface,* P *le point où le plan osculateur en* M *à l'arête de rebroussement rencontre l'axe* Oz. *Si* t *désigne la troisième coordonnée* z *du point* P, *exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de* t.

3° *Le plan osculateur en* M *à l'arête de rebroussement de la surface* S *coupe le plan* xOy *suivant une droite* Δ *qui a une enveloppe* C. *Soit* N *le point où la droite* Δ *touche son enveloppe* C. *Exprimer les coordonnées de* N *en fonction de* t.

4° *Que devient la développable* S *lorsque* $a = b$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale triple*

$$\iiint (2x + 3y + 6z)^2 \, dx \, dy \, dz,$$

prise à l'intérieur du volume limité par l'ellipsoïde qui, dans un système d'axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0.$$

(Juillet 1906)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soit le paraboloïde* S *dont les coordonnées d'un point variable s'expriment en fonction des deux paramètres* λ *et* φ *par les formules*

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda p \cos\varphi, \\ y &= 2\lambda q \sin\varphi, \\ z &= 2\lambda^2(p\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi), \end{aligned}$$

p, q *désignant des constantes données.*

1° *Quelle relation faut-il établir entre* λ *et* φ *pour que la courbe correspondante* C, *tracée sur la surface* S, *soit telle que le plan tangent à la surface* S *le long de cette courbe fasse un angle constant avec le plan des* xy?

2° *Soit C l'une de ces courbes; le plan tangent à S le long de C engendre une surface développable Σ. Montrer que les génératrices de cette développable font un angle constant avec Oz. Exprimer les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement en fonction du paramètre φ.*

3° *Déterminer sur la développable Σ les courbes qui, en chaque point, sont normales à la génératrice (de Σ) passant par ce point. Montrer que ces courbes sont planes et que leurs projections sur le plan des xy ont pour développée la projection sur ce même plan de l'arête de rebroussement de Σ.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x(1+x)\,dx}{(1+2x+2x^2)^2}.$$

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Énoncer et démontrer le théorème des résidus relatif à l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long d'un contour fermé, à l'intérieur duquel $f(z)$ est uniforme et n'admet que des singularités isolées. Application à l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}},$$

prise le long d'un cercle de rayon 4 ayant pour centre l'origine.

II. *Un plan a pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi + Z\sin\theta = f(\theta),$$

où θ et φ sont deux paramètres variables indépendants, et $f(\theta)$ une fonction donnée du seul paramètre θ. Déterminer en fonction de θ et φ les coordonnées d'un point de contact de ce plan avec son enveloppe, et trouver les lignes de courbure de cette surface enveloppe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'ellipse qui, dans un système d'axes rectangulaires, a pour équation*

$$x^2 + 3y^2 = 6y,$$

et la droite Δ *qui, dans le même système d'axes, a pour équation*

$$x = y.$$

La droite Δ *divise l'aire de l'ellipse en deux aires partielles,* A *et* B, *dont on demande de calculer le rapport* $\frac{A}{B}$.

(Novembre 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Recherche générale des développées d'une courbe* S *donnée.*

Développées d'une courbe plane : leur nature.

Développées d'une parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Trouver une courbe intégrale passant par un point donné dans le plan; condition de possibilité.

Solution singulière.

2° *Intégrer l'équation*

$$px + qy = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer que toute surface intégrale est engendrée par une droite qui se meut en rencontrant l'axe Oz *et en faisant un angle constant avec cet axe.*

Trouver une surface intégrale passant par une hélice circulaire ayant Oz *pour axe.*

Quelle valeur faut-il donner à K pour que l'hélicoïde à plan directeur soit une surface intégrale?

(Novembre 1906.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Série à double entrée. Énoncer et démontrer le théorème relatif à la convergence d'une pareille série, quand les modules des termes forment une série double convergente, pour un mode particulier de sommation. Appliquer ce théorème au calcul du produit* *de deux séries linéaires, toutes deux absolument convergentes.*

2° *Déterminer dans un plan une courbe telle que la tangente et la normale en un point quelconque* M *de la courbe interceptent sur la perpendiculaire élevée au point fixe* O *sur le rayon vecteur* OM *une longueur égale à* $\frac{2\overline{\mathrm{OM}}^2}{a}$, *a désignant une longueur donnée.*

Construire et rectifier une de ces courbes.

(Novembre 1906.)

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Étant donnée la surface de révolution autour de l'axe des z définie par les équations*

$$x = l\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y = l\sin\varphi\cos\theta,$$
$$z = l\log\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - l\sin\theta,$$

où l est une constante donnée, calculer les cosinus des angles a, b, c que fait avec les axes de coordonnées la normale à la surface en un point défini par les valeurs des deux paramètres variables θ *et* φ.

2° *Sur cette surface on considère toutes les courbes satisfaisant à la relation différentielle*

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sqrt{c}\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - c}},$$

où c est une constante quelconque. Calculer, pour l'une de ces courbes :

Le ds^2;

Les cosinus des angles α, β, γ *que fait la tangente en un point avec les axes;*

Les différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$;

Le rayon de courbure R *de la courbe;*

Et enfin les cosinus des angles ξ, η, ζ *que fait la normale principale à la courbe avec les axes.*

3° *Démontrer, en comparant* $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ *aux résul-*

tats trouvés dans la première partie, que les lignes considérées sont les lignes géodésiques de la surface.

SOLUTION.

Voir la Solution de la question d'Analyse du Concours d'agrégation de 1905 par M. Sicard dans le numéro de décembre 1905.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les coordonnées étant rectangulaires, on détermine, sur le paraboloïde dont l'équation est*

$$z = K\frac{y}{x},$$

une aire quadrilatère limitée par quatre génératrices. Deux de ces génératrices sont des axes de coordonnées; les deux autres sont situées respectivement dans les plans dont les équations sont

$$x = 1 \quad \text{et} \quad z = 2.$$

Calculer, en fonction de K, *le volume du cylindre compris entre le quadrilatère et sa projection sur le plan des* yz.

2° *Calculer* K *et achever le calcul numérique sachant que le paraboloïde se raccorde le long de l'axe des* z *avec les surfaces définies par les équations*

$$x = t^2(1+u_1)z + t\,(1+u_2),$$
$$y = t\,(2+u_3)z + t^2(1+u_4),$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 *sont des fonctions uniformes du paramètre variable* t *qui s'annulent pour* $t = 0$.

SOLUTION.

$$V = \frac{1}{K}\int_0^1 x\,dx \int_0^2 z\,dz,$$

$$K = \frac{1}{2}, \qquad V = 2.$$

(Novembre 1906.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *On donne trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver une surface* S *telle que,* M *étant un point quelconque de* S, P *la projection de* M *sur le plan des* xy, Q *la projection de* M *sur* Oz, *le plan tangent en* M *à* S *soit parallèle à la droite* PQ.

2° *Chercher si, parmi les surfaces* S *obtenues, il y en a qui sont de révolution autour de* Oz.

3° *Trouver, parmi les surfaces* S *obtenues, une surface passant par la courbe ayant pour équations*

$$z = 1, \qquad y = x\,\mathrm{L}x.$$

4° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface qui vient d'être obtenue au* 3°.

Épreuve pratique. — *On considère en coordonnées rectangulaires la surface*

$$z = \frac{1}{x}\,e^{\frac{y}{x}}.$$

Évaluer, à 0,001 *près, le volume compris entre cette surface, le plan des* xy, *le plan des* xz, *le plan* $y = 2x$ *et le plan* $x = 300$. (Juillet 1906.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que,* M *étant un point de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, Q *l'intersection de la tangente en* M *avec* Ox, *on ait*

$$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{PM}} = \mathrm{PQ}^2.$$

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, N *l'intersection de la normale en* M *avec* Ox, C *le centre de courbure correspondant à* M, G *la projection de* C *sur* Ox, *on ait*

$$\overline{\mathrm{GN}} = \overline{\mathrm{PM}}.$$

Épreuve pratique. — *Évaluer, à 0,1 près, la valeur de l'intégrale*

$$\iint \frac{dx\,dy}{x\sqrt{|y|}},$$

étendue à la portion de l'ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

comprise entre les droites

$$x = 1, \qquad x = 2.$$

(Novembre 1906.)

Épreuve théorique. — *Une fonction analytique de la variable* $z = x + yi$ *étant représentée par* $f(z) = P + Qi$:

Démontrer qu'il existe une fonction analytique qui vérifie la relation

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}},$$

et qui s'annule pour $z = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer les fonctions P *et* Q *des variables* x *et* y, *et la fonction* $f(z)$.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{f(z)},$$

et déterminer les diverses valeurs qu'elle prend quand la variable varie de 0 *à* z *par un contour arbitraire.*

Épreuve pratique. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^4\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = (x - a)^2.$$

(Novembre 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'expression*

$$(1)\quad \left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\right)dx+\left(x\frac{\partial z}{\partial y}+x-2xy+2yu\right)dy.$$

dans laquelle z désigne une fonction des deux variables indépendantes x et y, et u le résultat $f'(z-x)$ de la substitution de $z-x$ à t dans la dérivée $f'(t)$ d'une fonction donnée $f(t)$ de la lettre t.

1° *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier z pour que l'expression* (1) *soit une différentielle exacte.*

2° *Déterminer l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles qui, pour $x=0$, se réduit à y^2; montrer qu'elle est indépendante de la fonction f. et intégrer la différentielle obtenue en la substituant à la place de z dans l'expression* (1).

II. *Déterminer l'aire de la portion de la surface, représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$z=\frac{\sqrt{2}}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}},$$

qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur du triangle dont les trois côtés ont respectivement pour équations

$$x=0,\qquad y=0,\qquad x-y=3.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à l'aide de la théorie des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

(Novembre 1906.)