Nouvelles annales de mathématiques

A. de Saint-Germain

Sur la solution d'une difficulté qui se présente dans l'étude de l'équilibre du Treuil

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 111-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__111_1>

[R4aδ]

SUR LA SOLUTION D'UNE DIFFICULTÉ QUI SE PRÉSENTE DANS L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DU TREUIL;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On sait que les théories de la Mécanique rationnelle, appliquées à des solides qu'on suppose absolument rigides, peuvent conduire à des résultats inadmissibles pour les solides naturels.

Considérons, par exemple, un solide en équilibre s'appuyant sur un plan fixe par plus de trois points : la Mécanique rationnelle conduit à ce paradoxe que les grandeurs des pressions aux points d'appui sont indéterminées. L'indétermination disparaît si l'on suppose le solide et le plan susceptibles de légères déformations qui provoquent des réactions données par la théorie de l'Élasticité; mais, sans recourir à la théorie générale, on a montré qu'il est facile de lever l'indétermination en admettant, pour les déformations du solide et du plan, ainsi que pour les réactions élastiques, des lois particulières et très simples; voir, par exemple, APPELL, *Mécanique,* t. I, page 148.

Une anomalie du même genre se rencontre quand on étudie les conditions d'équilibre d'un solide qui a deux points fixes, A, B, et que je désignerai sous le nom de treuil.

Si l'on cherche, à l'aide des équations de la Mécanique, les forces qu'il faudrait appliquer aux points A, B, s'ils étaient libres, pour les maintenir fixes, on trouve que les projections de ces forces sur AB sont indéterminées : leur somme seule est connue. Ici encore, le paradoxe disparaît si l'on suppose le treuil susceptible de légères déformations provoquant des réactions que fera connaître la théorie générale de l'Élasticité; mais je ne sache pas qu'on ait montré, comme il a été fait pour le cas précédent, la possibilité de lever très facilement l'indétermination en faisant des hypothèses simples et bien acceptables sur les déformations du treuil et sur les réactions élastiques qui en résultent. Je me propose de le faire pour compléter, dans une certaine mesure, une des théories les plus élémentaires de la Mécanique.

Je suppose la loi des déformations dont le treuil est susceptible telle qu'une quelconque, Ω, de ses sections perpendiculaires à AB ne puisse subir qu'une translation parallèle à cette droite, et dont l'amplitude soit égale à α, comptée positivement dans le sens de AB, que je prends pour axe des z. Considérons les sections Ω_k, Ω_{k+1}, passant par les points M_k, M_{k+1} d'application de deux forces extérieures, dont les projections sur OZ soient Z_k et Z_{k+1}, et supposons qu'aucune autre force extérieure n'agisse sur la tranche du treuil comprise entre les plans de Ω_k et de Ω_{k+1}. Cette tranche éprouvera, dans le sens de OZ, une dilatation égale à $\alpha_{k+1} - \alpha_k$, le z du point M_{k+1} étant supérieur à celui de M_k : j'admets que cette dilatation provoquera, dans la tranche considérée, une tension

$$(1) \qquad T_k = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{Q_k}$$

parallèle à OZ : Q_k est un coefficient donné, qui dépend de l'élasticité et des dimensions de la tranche.

Supposons le treuil sollicité par n forces extérieures, appliquées en des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et ayant pour composantes suivant OZ, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Soient enfin Z_0 et Z_{n+1} les composantes des forces qu'il faudrait appliquer aux points A, B, supposés libres, pour les maintenir fixes. En admettant que ces points soient aux deux extrémités du treuil, nous voyons que les deux portions de ce solide comprises entre le point A et le plan Ω_1, d'une part, entre le plan Ω_n et le point B, d'autre part, sont soumises à des tensions

$$T_0 = \frac{\alpha_1}{Q_0}, \qquad T_n = -\frac{\alpha_n}{Q_n},$$

parallèles à OZ. Les tensions des autres tranches dans lesquelles on peut décomposer le treuil sont données par la formule (1).

Le point A étant en équilibre, on a l'équation

$$(2) \qquad Z_0 + \frac{\alpha_1}{Q_0} = 0.$$

Envisageons maintenant la portion du treuil comprise entre le point A et la section Ω_k : comme elle est en équilibre, la somme des projections sur OZ des forces extérieures $Z_0, Z_1, \ldots, Z_k$ et T_k est nulle : remplaçant T_k par sa valeur (1) et faisant successivement k égal à 1, 2, ..., n, on a n équations :

$$(3)\qquad \begin{cases} Z_0 + Z_1 + \qquad \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{Q_1} = 0, \\ Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dfrac{\alpha_3 - \alpha_2}{Q_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n - \dfrac{\alpha_n}{Q_n} = 0. \end{cases}$$

On obtient une $(n+2)^{\text{ième}}$ équation en égalant à zéro la somme des projections de toutes les forces extérieures :

$$(4)\qquad Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n + Z_{n+1} = 0.$$

Cela posé, chassons les dénominateurs $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ dans les équations (2) et (3), et ajoutons membre à membre toutes les équations transformées : on voit que les α_k se détruisent deux à deux, et il reste l'équation :

$$(5)\qquad \begin{cases} (Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) Z_0 \\ \quad + (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) Z_1 + \ldots \\ \quad + (Q_{n-1} + Q_n) Z_{n-1} + Q_n Z_n \quad = 0. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement Z_0. Pour avoir Z_{n+1}, on multiplie tous les termes de l'équation (4) par $Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n$, et de l'équation ainsi formée on retranche l'équation (5) : il reste

$$(6)\qquad \begin{cases} Q_0 Z_1 + (Q_0 + Q_1) Z_2 + \ldots \\ \quad + (Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_{n-1}) Z_n \\ \quad + (Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_{n-1} + Q_n) Z_{n+1} = 0; \end{cases}$$

on en déduit Z_{n+1} ; les réactions en A et B sont déterminées sans ambiguïté. Enfin les équations (2) et (3) permettront de calculer successivement les déplacements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des sections $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ par rapport aux positions qu'elles occuperaient si le treuil n'était sollicité par aucune force extérieure : les tensions auxquelles sont soumises les diverses parties du treuil sont alors déterminées.

On pourrait imaginer que les extrémités A, B du treuil soient liées à des points non pas absolument fixes, mais faisant partie des masses extérieures et susceptibles de légers déplacements. Les projections α_0, α_{n+1} de ces déplacements sur OZ seraient deux nouvelles inconnues, mais on pourrait admettre que les composantes Z_0, Z_{n+1} soient de la forme

$$Z_0 = -\frac{\alpha_0}{\lambda}, \qquad Z_{n+1} = -\frac{\alpha_{n+1}}{\mu},$$

et le problème resterait déterminé. Il est facile de voir comment se modifieraient les équations que j'ai établies; je me contenterai de dire que, dans les équations (5) et (6), les coefficients des diverses composantes Z_0, $Z_1, \ldots, Z_n$, Z_{n+1} qui y figurent seraient augmentés de $\lambda + \mu$; Z_0 et Z_{n+1} seraient encore bien déterminées.