Hadamard

Sur la mise en équation des problèmes de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 97-100
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__97_0>

[R6a]

SUR LA MISE EN ÉQUATION DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE;

Par M. HADAMARD.

Supposons qu'on ait, en appliquant un certain nombre des théorèmes généraux de la Dynamique, écrit, pour un problème déterminé de Mécanique rationnelle, des équations en nombre n égal à celui des paramètres qu'il s'agit d'exprimer en fonction du temps.

Ces équations sont-elles bien distinctes entre elles? sont-elles *les* équations du mouvement? Autrement dit, tout système de fonctions du temps qui satisfera à ces équations représentera-t-il par cela même un mouvement possible du système, une solution du problème posé?

En fait, un peu d'attention suffit en général à reconnaître s'il en est ou non ainsi.

Il n'est peut-être pas inutile, cependant, de noter les services que peut rendre à cet égard, dans l'enseignement, la remarque suivante, bien connue en elle-même :

On sait que toutes les équations de la Dynamique peuvent être considérées comme déduites de l'équation dite *générale,* celle qui résulte de la combinaison du principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles.

Cette dernière équation représente, d'une façon entièrement adéquate, l'ensemble des conditions auxquelles doit satisfaire le mouvement : elle exprime la condition nécessaire et suffisante d'équilibre entre les forces réellement existantes et les forces d'inertie.

Toute équation du problème s'obtiendra en prenant, pour le déplacement virtuel qui figure dans l'équation générale, l'un quelconque de ceux qui sont compatibles avec les liaisons.

La réponse à notre question se dégage maintenant d'elle-même.

On peut, avant même de les avoir formées, reconnaître si n équations déterminées du problème sont distinctes et suffisent à caractériser le mouvement du système.

Il faut et il suffit, pour cela, que les déplacements virtuels auxquels elles correspondent soient eux-mêmes indépendants (et, par conséquent, susceptibles de reproduire par leurs combinaisons linéaires le déplacement virtuel le plus général possible).

Ces déplacements virtuels peuvent d'ailleurs toujours être indiqués *a priori*. On sait que :

L'équation	correspond au déplacement virtuel.
de Lagrange relative à un des paramètres..	Variation de ce paramètre seul.
des projections sur un axe................	Translation parallèle à cet axe.
des moments par rapport à un axe	Rotation autour de cet axe.
des forces vives.......	Déplacement réel du système.

Considérons, par exemple, le *mouvement de Poinsot,* c'est-à-dire le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, en l'absence de forces accélératrices.

Les équations d'Euler seront toujours indépendantes. Car elles résultent de l'application du théorème des moments des quantités de mouvement aux trois axes d'inertie : or tout déplacement admissible du système se décompose en trois rotations autour de ces axes.

Il n'en aurait pas été de même avec les équations de Lagrange relatives aux trois angles d'Euler θ, φ, ψ. Car, lorsque l'angle θ de l'axe des z fixe avec l'axe des z mobile est nul ou égal à π, les déplacements dus à des variations infinitésimales de φ et de ψ ne sont plus indépendants : ils se réduisent à une seule et même rotation autour de la position commune des deux axes en question.

Soit encore le mouvement du *pendule sphérique*.

Les deux équations différentielles que l'on est conduit à écrire correspondent au théorème des aires et à celui des forces vives, c'est-à-dire à deux déplacements virtuels dont l'un est une rotation autour d'un axe vertical et l'autre le déplacement réel.

Le problème est ainsi correctement mis en équation dans le cas général.

Mais il cesse de l'être lorsque le mouvement instantané réel est une rotation autour de la verticale, c'est-à-dire lorsque $\frac{d\theta}{dt} = 0$, θ étant l'angle de cette verticale avec la tige du pendule.

Une difficulté de ce genre intervient, comme on sait, dans les principaux problèmes classiques de Mécanique rationnelle. L'intégration se ramène, en général, à celle d'une équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = f(\theta),$$

et une discussion spéciale est nécessaire lorsque la valeur commune des deux membres s'annule.

Ce qui précède montre qu'il en est forcément ainsi dès qu'on applique le théorème des forces vives. Ce théorème est, en effet, substitué à l'une des n équations que l'on pourrait écrire sans son intervention (par exemple à l'une des n équations de Lagrange) : le déplacement réel est, dans ces conditions, substitué à un des n déplacements fondamentaux et les équations du problème sont en défaut lorsque ce déplacement réel est une combinaison des $n - 1$ autres déplacements utilisés.

On peut remarquer que l'équation des forces vives est, parmi les équations classiques, la seule qui puisse devenir insuffisante pour des déterminations spéciales des *vitesses*.

Les autres équations peuvent, elles aussi, être exceptionnellement en défaut (comme nous l'avons vu à propos du mouvement de Poinsot); mais, si le théorème des forces vives n'intervient pas, la mise en équation, si elle est correcte en général, ne peut cesser de l'être que pour des *positions* spéciales du système.