NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur une propriété de l'hyperboloïde orthogonal et sur un système articulé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 69-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__69_1>

[$L^2$21b, R1e]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOÏDE ORTHOGONAL ET SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

Par M. R. BRICARD.

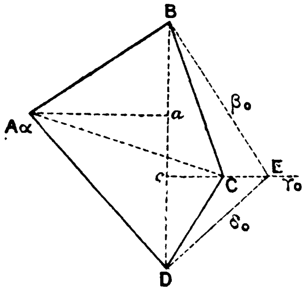
1. Proposons-nous tout d'abord le problème suivant :

ABCD *étant un quadrilatère gauche, soient* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *les perpendiculaires élevées des points* A, B, C, D, *respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). *A quelles conditions doit satisfaire le quadrilatère* ABCD *pour que les quatre droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *appartiennent à une même hyperboloïde?*

Comme on va le voir, il se présente le fait remarquable que les conditions, qui seraient, *a priori,* au nombre de trois, se réduisent à *deux* distinctes, d'ailleurs bien simples : *le quadrilatère* ABCD *doit avoir ses côtés opposés égaux deux à deux.*

2. Prenons le plan (ABD) comme plan de la figure (*fig.* 1). La droite $A\alpha$ se projette orthogonalement sur

Fig. 1.



ce plan au point A, les droites $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ se projettent suivant des droites $B\beta_0$, $C_0\gamma_0$, $D\delta_0$, qui sont respectivement perpendiculaires à AB, BD, AD. Si les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont sur un même hyperboloïde, il existe une droite I, parallèle à $A\alpha$, qui rencontre $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$. Cela exige que les trois droites $B\beta_0$, $C_0\gamma_0$, $D\delta_0$ concourent en un même point E. Il revient au même de dire que le point C (de l'espace) et le point d'intersection E des droites $B_0\beta_0$ et $D_0\delta_0$ doivent avoir les projections orthogonales sur BD confondues en un même point c. Mais le point E est diamétralement opposé au point A sur le cercle qui passe par les points A, B, D. Le point c est donc symétrique, par rapport au milieu de BD, du point a, projection de A sur BD, et l'on a

$$Ba = cD, \qquad Bc = aD;$$

d'où l'on conclut

$$\overline{AB}^2 - \overline{DA}^2 = \overline{Ba}^2 - \overline{aD}^2 = \overline{cD}^2 - \overline{Bc}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2$$

ou

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2.$$

Réciproquement, si cette relation entre les longueurs des côtés du quadrilatère ABCD est vérifiée, il existe une droite parallèle à $A\alpha$, et rencontrant $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, et, à cause de la symétrie de la relation, une droite parallèle à $C\gamma$ et rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $D\delta$.

Il existera de même une droite parallèle à $D\beta$ et rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, si la relation suivante est vérifiée :

$$(2) \qquad \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Si les relations (1) et (2) sont simultanément satisfaites, on a

$$(3) \qquad AB = CD, \qquad BC = DA.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe quatre droites distinctes rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, *c'est-à-dire pour que ces quatre droites appartiennent à un même hyperboloïde.* C'est le résultat annoncé au n° 1.

3. Soient ABCD un quadrilatère satisfaisant aux relations (3), et (H), l'hyperboloïde qui contient $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$. La figure constituée par ABCD et (H) dépend de $12 - 2 = 10$ paramètres. Donnons-nous, *a priori*, l'hyperboloïde (H), et cherchons à construire le quadrilatère ABCD de telle manière que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ soient des génératrices de (H). Il semblerait que le problème est simplement indéterminé, quel que soit (H), puisque nous imposons neuf conditions aux dix paramètres dont dépend la

figure. On va voir qu'en réalité, *l'hyperboloïde* (H) *doit satisfaire à une condition, et que, cette condition étant supposée satisfaite, le problème est doublement indéterminé.*

Il est tout d'abord bien évident que le quadrilatère ABCD admet un axe de symétrie (c'est la droite joignant le milieu des diagonales AC et BD) et que cet axe est un axe principal de l'hyperboloïde (H). Rapportons cet hyperboloïde à ses axes principaux et soit alors

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

son équation. Le quadrilatère ABCD doit être, d'après ce qu'on vient de dire, symétrique par rapport à l'un des axes de coordonnées. Supposons que cet axe soit Oz. Si l'on appelle (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A et B, celles des points C et D sont respectivement $(-x_1, -y_1, z_1)$ et $(-x_2, -y_2, z_2)$.

Le plan ABD a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & 0 & z_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où l'on tire sans peine les équations de la droite $A\alpha$:

$$\frac{x - x_1}{y_2(z_1 - z_2)} = \frac{y - y_1}{-x_2(z_1 - z_2)} = \frac{z - z_1}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

Pour exprimer que la droite $A\alpha$ est sur (H), il suffit d'écrire qu'un point quelconque de la droite $A\alpha$, dont les coordonnées sont

$$x = x_1 + \lambda y_2(z_1 - z_2),$$
$$y = y_1 - \lambda x_2(z_1 - z_2),$$
$$z = z_1 + \lambda(x_2 y_1 - x_1 y_2),$$

appartient à cette surface. On forme ainsi une équation du second degré en λ qui doit être identiquement satisfaite.

Il nous suffira de retenir la condition obtenue en annulant le coefficient du terme en λ.

On trouve ainsi

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A x_1 y_2 (z_1 - z_2) - B x_2 y_1 (z_1 - z_2) \\ & \qquad + C z_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouvera une condition analogue en écrivant que $B\beta$ est sur (H). Il suffit de permuter les indices 1 et 2, et l'on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & A x_2 y_1 (z_2 - z_1) - B x_1 y_2 (z_2 - z_1) \\ & \qquad + C z_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où, en ajoutant les équations (1) et (2),

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)(z_1 - z_2)(A + B - C) = 0.$$

Les deux premiers facteurs de la relation précédente ne sont pas nuls, sans quoi le quadrilatère ABCD serait dans un plan, soit passant par Oz, soit parallèle à xOy. On doit donc avoir

$$(3) \qquad A + B - C = 0.$$

Ce qui montre bien que l'hyperboloïde (H) n'est pas quelconque : la condition (3), de forme bien connue, exprime qu'il est *orthogonal,* c'est-à-dire qu'il a des génératrices et des plans cycliques perpendiculaires ([1]).

4. Réciproquement, soit (H) un hyperboloïde orthogonal. Je dis *que l'on peut construire une double infinité de quadrilatères* ABCD, *tels que les perpendiculaires* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, *menées des sommets* A, B, C, D *du quadrilatère, respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA), *soient des génératrices de même système de* (H).

Ce théorème peut être considéré comme résultant du compte de paramètres, fait au début du n° 3. Mais on obtient une démonstration plus rigoureuse et plus instructive par des considérations d'un ordre différent.

5. Dans ce qui suit, je considérerai un hyperboloïde (H) quelconque, mais distinct d'un paraboloïde; je dirai, pour abréger, que *les génératrices de* (H) *sont* (1) *ou* (2) suivant qu'elles appartiennent à un système ou à l'autre.

Soient G une génératrice (1) fixe, Γ et Γ' deux génératrices (1) variables, telles que les perpendiculaires communes à G et à Γ d'une part, à G et à Γ' de l'autre, aient leurs pieds sur G confondus. Il existe entre Γ et Γ' une correspondance dont nous allons chercher la nature.

La perpendiculaire commune à G et à Γ engendre, comme l'on sait, un *cylindroïde* ou *conoïde de*

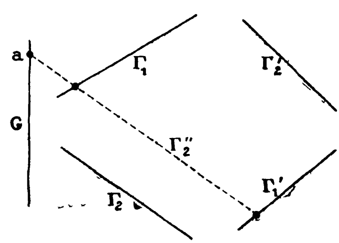
([1]) D'une façon plus précise, sur les six plans cycliques d'un hyperboloïde orthogonal, il y en a *deux* qui sont perpendiculaires à des génératrices de la surface. Ces deux plans, supposés diamétraux, se coupent suivant un axe principal. Il faudra toujours entendre, dans ce qui suit, pour *axe* de l'hyperboloïde, l'axe dont il s'agit.

Plücker (P), dont G est la droite double. Donnons-nous Γ, et soit X la perpendiculaire commune à G et à Γ. X ne peut être perpendiculaire commune à G et à aucune génératrice (1) autre que Γ, sans quoi (H) aurait trois génératrices parallèles à un même plan, ce qui contredirait l'hypothèse faite que (H) n'est pas un paraboloïde. Mais, par le point où X rencontre G, il passe une autre génératrice X′ du cylindroïde (P), et X′ est perpendiculaire commune à G et à une seule génératrice (1) Γ'.

La correspondance entre Γ et Γ' est donc biunivoque; comme elle est, en outre, évidemment symétrique, on voit *que Γ et Γ' sont conjuguées dans une involution* ($\mathfrak{I}$).

Il est aisé de définir l'involution ($\mathfrak{I}$) par deux couples particuliers de génératrices conjuguées (Γ, Γ') : construisons (*fig.* 2) les deux génératrices (1) Γ_1 et Γ_2

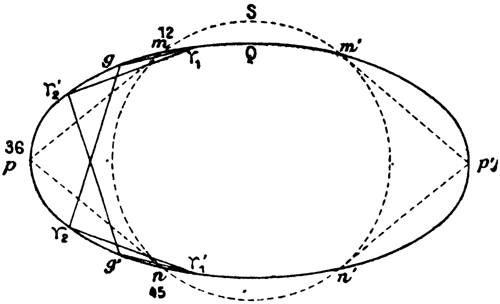
Fig. 2.



qui sont perpendiculaires à G. Il existe une génératrice (1) Γ'_2, autre que G, perpendiculaire à Γ_1, et une génératrice (1) Γ'_1, autre que G, perpendiculaire à Γ_2. Soit enfin Γ''_2 la génératrice (2) parallèle à Γ_2; Γ''_2 est la perpendiculaire commune à G et à Γ'_1. Désignons par *a* le point où Γ''_2 rencontre G; comme G est perpendiculaire au plan (Γ_1, Γ''_2), *a* est le pied sur C de la perpendiculaire commune à G et à Γ_1. On voit donc que Γ_1 et Γ'_1 sont conjuguées dans l'involution ($\mathfrak{J}$). De même Γ_2 et Γ'_2. Ainsi, *l'involution* ($\mathfrak{J}$) *est définie pour les deux couples de génératrices conjuguées* (Γ, Γ'_1) *et* (Γ_2, Γ'_2).

Cela établi, supposons que (H) est un hyperboloïde orthogonal, et représentons en Q sa trace sur le plan de l'infini (*fig.* 3). Représentons aussi en S l'ombilicale

Fig. 3.



et soient m, n, m', n' les quatre points d'intersection de S et de Q; puisque (H) est orthogonal, deux des cordes communes à ces deux coniques ont leurs pôles, par rapport à S, sur Q; par exemple, les tangentes à S aux points m et n vont concorder en p sur Q, et les tangentes à S aux points m' et n' vont concorder en p' sur Q.

On peut considérer le contour *mpn* comme constituant *un hexagone dégénéré, inscrit à* Q, *et dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à* S; les sommets de cet hexagone sont, dans l'ordre, les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, disposés comme le montre la figure.

Il existe donc, en vertu d'un théorème connu, *une* *infinité d'hexagones inscrits à* Q *et dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à* S (¹). *Soit* $g\gamma_1\gamma'_2 g'\gamma'_1\gamma_2$ un tel hexagone. Ses sommets sont les traces, sur le plan de l'infini, de génératrices (1) de (H), que nous appellerons respectivement G, Γ_1, Γ'_2, G', Γ'_1, Γ_2. (G, Γ_1), (Γ_1, Γ'_2), ..., (Γ_2, G) sont des couples de génératrices rectangulaires.

On voit donc que deux génératrices, conjuguées dans l'involution ($\mathfrak{I}$) définie plus haut, ont pour traces sur le plan de l'infini deux points de Q, conjugués dans l'involution (i) définie sur cette conique par les couples de points (γ_1, γ'_1) et (γ_2, γ'). D'autre part, quand on fait varier l'hexagone $g\gamma_1\gamma'_2 g'\gamma'_1\gamma_2$, on sait que deux sommets opposés de cet hexagone sont conjugués dans une involution définie, on le reconnaît immédiatement, par les couples (m, n), (m', n'). L'involution (i) se confond donc avec celle-là. Par conséquent, *l'involution* ($\mathfrak{I}$) *ne dépend pas de la génératrice* G. Deux génératrices conjuguées dans cette involution ont leurs traces sur le plan de l'infini en ligne droite avec le point de rencontre de mn et de $m'n'$, ce qui revient à dire que ces génératrices sont symétriques par rapport à l'axe de l'hyperboloïde.

Nous sommes donc parvenus au théorème suivant :

Soient (H) *un hyperboloïde orthogonal,* G, Γ *et* Γ' *trois génératrices de même système de cet hyperbo-*

(¹) mpn peut aussi être considéré comme un quadrilatère dégénéré inscrit à Q et circonscrit à S. On peut donc énoncer le théorème suivant (qui a sans doute été déjà remarqué) :

Deux coniques Q *et* S *doivent satisfaire aux mêmes conditions pour qu'il y ait des quadrilatères inscrits à* Q *et circonscrits à* S, *et pour qu'il y ait des hexagones inscrits à* Q *et ayant leurs sommets consécutifs conjugués par rapport à* S.

loïde, Γ *et* Γ' *étant symétriques par rapport à l'axe de la surface. Les perpendiculaires communes à* G *et* Γ *d'une part, à* G *et à* Γ' *de l'autre, ont leurs pieds sur* G *confondus.*

La réciproque énoncée au n° **4** s'en déduit immédiatement.

6. Je vais maintenant montrer que les résultats précédents conduisent à la connaissance d'un système articulé, très intéressant, découvert par G.-T. Bennett [1], et retrouvé indépendamment par M. Émile Borel [2].

Soient toujours ABCD un quadrilatère gauche à côtés opposés égaux, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ les perpendiculaires élevées des sommets A, B, C, D aux plans (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). Considérons les droites $B\beta$ et $C\gamma$ comme formant une figure de grandeur invariable. Puisque $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont sur un même hyperboloïde, on peut donner à la figure ($B\beta$, $C\gamma$) un déplacement infiniment petit, tel que les droites $B\beta$ et $C\gamma$ aient respectivement $A\alpha$ et $D\delta$ pour droites conjuguées dans le complexe linéaire attaché à ce déplacement infiniment petit. Autrement dit, dans le déplacement, $B\beta$ tourne autour de $A\alpha$, $C\gamma$ tourne autour de $D\delta$. Nous pouvons encore donner à ce résultat l'expression suivante : On peut déformer infiniment peu la figure ($A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$), ($A\alpha$, $B\beta$), ($B\beta$, $C\gamma$), ($C\gamma$, $D\delta$), ($D\delta$, $A\alpha$) constituant quatre figures invariables.

Après cette déformation infiniment petite, ABCD est encore un quadrilatère à côtés opposés égaux ; donc

---

(1) *Engineering* (décembre 1903, p. 777) : *A new Mechanism.*

(2) *Mémoires des savants étrangers* (t. XXXIII, n° 1, p. 56) : *Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques.*

$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont encore sur un même hyperboloïde, et la figure peut recevoir une nouvelle déformation infiniment petite; et ainsi de suite. Nous arrivons donc à cette conclusion que la figure est susceptible d'une déformation finie. Ainsi :

Soient ABCD *un quadrilatère gauche dont les côtés opposés sont égaux deux à deux, et* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *les perpendiculaires menées des points* A, B, C, D, *respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). *On peut déformer le système, les couples de droites* $(A\alpha, B\beta)$, $(B\beta, C\gamma)$, $(C\gamma, D\delta)$, $(D\delta, A\alpha)$ *formant quatre figures de grandeurs invariables.*

On a ainsi formé une *chaîne fermée de quatre couples rotoïdes,* pour employer le langage introduit par M. Kœnigs dans sa Théorie des mécanismes, c'est-à-dire un système articulé constitué de quatre corps rigides, articulés deux à deux suivant des charnières qui sont les quatre droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$.

7. On peut d'ailleurs donner une démonstration directe bien simple de la déformabilité du système en question : tout revient à démontrer, on le voit tout de suite, que le quadrilatère ABCD peut être déformé de telle manière que ses *dièdres* restent tous de grandeurs constantes (j'appelle, par exemple, *dièdre* $\widehat{AB}$ *du quadrilatère,* celui que forment les deux plans (DAB), (ABC).

Le quadrilatère ABCD peut être évidemment déformé de telle manière que le dièdre $\widehat{AB}$ reste de grandeur constante (puisque ce quadrilatère possède deux paramètres de déformation). Je vais montrer *que tous ses autres dièdres restent aussi de grandeurs constantes.*

On a en effet (*voir* la *fig.* 1), dans le trièdre BACD,

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BA}} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{CBD}}.$$

Mais les deux triangles ABD, CBD sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. On a donc

$$\widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Donc

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BA}} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{AD}{AB}$$

ou

$$\sin \widehat{BC} = \frac{AD}{AB} \sin \widehat{BA},$$

ce qui établit bien la constante du dièdre $\widehat{BC}$.

On vérifiera de même que les autres dièdres du quadrilatère sont de grandeurs constantes.