Nouvelles annales de mathématiques

L. Vessot King

Expression de $\wp\frac{u}{2}$ comme quotient de deux séries entières

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 67-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__67_1>

[F4b]

EXPRESSION DE $\wp \frac{u}{2}$ COMME QUOTIENT DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES;

PAR M. L. VESSOT KING.

On a, d'après une formule symétrique établie dans les *Nouvelles Annales* (mai 1904) par M. Humbert,

$$\wp \frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2 - e_3)\sigma_1 u + e_2(e_3 - e_1)\sigma_2 u + e_3(e_1 - e_2)\sigma_3 u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \qquad p\frac{u}{2} = \frac{\sum e_\alpha(e_\beta - e_\gamma)\sigma_\alpha u}{\sum (e_\beta - e_\gamma)\sigma_\alpha u},$$

il en résulte immédiatement une expression de $p\frac{u}{2}$ sous la forme du quotient de deux séries.

Le développement des fonctions $\sigma_\alpha u$ ($\alpha = 1, 2, 3$) en série se fait d'après la formule

$$(2) \qquad \sigma_\alpha u = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (A_\nu + B_\nu . e_\alpha + C_\nu . e_\alpha^2) \frac{u^{2\nu}}{2\nu!}.$$

Les coefficients A_ν, B_ν, C_ν sont connus et s'obtiennent pour les diverses valeurs de ν au moyen de formules récurrentes.

Remplaçons dans la formule (1) $\sigma_\alpha u$ par son développement en série et remarquons d'abord que l'on a

$$\sum e_\alpha = 0, \qquad \sum (e_\beta - e_\gamma) = 0,$$

$$\sum e_\alpha(e_\beta - e_\gamma) = 0, \qquad \sum e_\alpha^3(e_\beta - e_\gamma) = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Il en résulte, sans difficulté,

$$(3) \qquad p\frac{u}{2} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \frac{u^{2\nu}}{2\nu!}}{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu \frac{u^{2\nu}}{2\nu!}}$$

ou bien, après avoir substitué les valeurs de B_ν et de C_ν et après avoir simplifié le résultat,

$$p\frac{u}{2} = \frac{4}{u^2}\,\frac{1 + \dfrac{g_2}{2^5.3.5}u^4 + \dfrac{13g_3}{2^8.3.5.7}u^6 + \ldots}{1 - \dfrac{g_2}{2^6.3.5}u^4 - \dfrac{g_3}{2^7.3.5.7}u^6 + \ldots}.$$

Nous retrouvons la série ordinaire de $p\frac{u}{2}$ en développant l'expression de droite suivant les puissances de u.