V. JAMET

Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m augmente au delà de toute limite

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 63-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__63_1>

[D1b]

SUR LA LIMITE DE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, QUAND m AUGMENTE AU DELÀ DE TOUTE LIMITE;

PAR M. V. JAMET.

Préoccupé par le désir d'atteindre au maximum de simplicité dans l'exposition de cette question toujours effrayante pour les débutants, je me suis aperçu qu'elle perdrait beaucoup de sa difficulté pour un élève qui connaîtrait préalablement le développement en série entière de $(1-x)^{-m}$, au moins pour les valeurs entières et positives de m. Ce développement, on peut le faire dériver du théorème sur la différentiation des séries entières, appliqué $m-1$ fois de suite au développement connu de $(1-x)^{-1}$, savoir

$$1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

Mais procéder ainsi, ce serait simplement déplacer la difficulté, car le théorème invoqué présente, à mon avis, des difficultés du même ordre que la recherche de la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. J'ai pensé, en conséquence, qu'il y avait intérêt à établir le développement de $(1-x)^{-m}$, par un procédé qui suppose acquis un minimum de connaissances préalables, savoir le calcul algébrique, et les propriétés les plus élémentaires des séries.

1. Tout d'abord, on reconnaît que la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

est convergente, quel que soit m, pour toute valeur de x comprise entre $+1$ et -1. Soit donc, pour une telle valeur de x, y_m la somme de cette série, et soit $y_{m,q}$ la somme de ses $q+1$ premiers termes. Par la multiplication des polynomes, on trouve

$$\begin{aligned}(1-x)y_{m,q}\\ &=\left[1+\sum_{p=1}^{p=q}\left(\frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}-\frac{m(m+1)\ldots(m+p-2)}{\overline{p-1}!}\right)x^p\right]\\ &\quad-\frac{m(m+1)\ldots(m+q-1)}{q!}x^{q+1}\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}(1-x)y_{m,q}\\ &=\left(1+\sum_{p=1}^{p=q}\frac{(m-1)m(m+1)\ldots(m+p-2)}{p!}x^p\right)\\ &\quad-\frac{m(m+1)\ldots(m+q-1)}{q!}x^{q+1}.\end{aligned}$$

Mais, si le nombre q augmente au delà de toute limite, le dernier terme du second membre tend vers zéro, car il est égal au terme général d'une série dont on reconnaît aisément la convergence. On en conclut

$$\lim(1-x)y_{m,q}$$
$$=1+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(m-1)m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}x^p,$$

c'est-à-dire

$$(1-x)y_m = 1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)m}{1.2}x^2$$
$$+\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

ou bien

$$(1)\qquad (1-x)y_m = y_{m-1}.$$

2. Supposons désormais que m soit un entier positif. Nous trouverons de même

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1-x)y_{m-1}=y_{m-2},\\ (1-x)y_{m-2}=y_{m-3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (1-x)y_2 \quad = y_1. \end{array}\right.$$

Mais

$$y_1 = 1+x+x^2+x^3+\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

On en déduit

$$(3)\qquad (1-x)y_1 = 1.$$

En multipliant membre à membre les égalités (1), (2), (3), et supprimant, aux deux membres de l'égalité résultante, les facteurs communs y_1, y_2, $\ldots$, y_{m-1}, on trouve

$$(1-x)^m y_m = 1 \qquad \text{ou bien} \qquad y_m = (1-x)^{-m},$$

c'est-à-dire

$$(1-x)^{-m} = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}x^p+\ldots.$$

3. Dans cette égalité, établie pour toute valeur entière de m, faisons $x = \frac{1}{m}$. Nous trouvons

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2.m^2} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!\,m^p} + \ldots.$$

Or le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de cette série, égal à

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 + \frac{p-1}{m}\right)}{p!},$$

est évidemment supérieur à $\frac{1}{p!}$, et l'on en conclut

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} > e.$$

4. D'autre part, le développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binome montre que le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de ce développement est égal à

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right)}{p!}$$

et par conséquent inférieur à $\frac{1}{p!}$. On en conclut

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e.$$

Si donc on veut démontrer que les nombres

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

tendent l'un et l'autre vers e, quand m augmente sans limite, en prenant des valeurs entières et positives, il suffit de faire voir que leur différence tend vers zéro.

Or

$$(5)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}.$$

En vertu de l'identité qui permet de décomposer $x^m - a^m$ en un produit de facteurs entiers, on trouve

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} &= \frac{1}{m(m-1)}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\right.\\ &\left.+\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\right].\end{aligned}$$

On en conclut

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\frac{1}{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1};$$

et, en vertu des relations (4) et (5),

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\frac{e}{m-1},$$

ce qui démontre la proposition.