NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE WEBER

Note sur la généralisation du théorème de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 61-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__61_1>

[K2e]

NOTE SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. ÉMILE WEBER.

A propos de la très intéressante généralisation du théorème de Feuerbach, indiquée dans les *Nouvelles Annales* par M. Fontené, on peut faire les remarques suivantes :

1. Le lieu des points en ligne droite avec leur in-

verse triangulaire et avec le centre du cercle circonscrit O a pour équation en coordonnées trilinéaires normales :

$$\sum a^2(\gamma \cos C - \beta \cos B) = 0. \tag{1}$$

C'est une cubique circonscrite au triangle fondamental ABC et passant par les pieds des *syhauteurs* (droites joignant les sommets au centre O du cercle circonscrit).

2. Le cercle pédal d'un point quelconque P du cercle ABC est la droite de Simson de P. Si P est tel que son inverse P′ (à l'infini) soit précisément le point à l'infini de la direction PO, cette droite de Simson sera, en vertu du théorème de M. Fontené, tangente au cercle d'Euler. Pour avoir tous les points P répondant à ces considérations, il faut chercher les points d'intersection de la cubique (1), avec le cercle circonscrit

$$\sum a\beta\gamma = 0.$$

Mais, reculant devant la complication des calculs à effectuer à cet effet, nous avons essayé de résoudre la question par la méthode géométrique. Soit donc P un des points cherchés ayant son inverse à l'infini sur PO. Le diamètre PO sera parallèle à l'isogonale AD de AP. Soit E le second point d'intersection de OP avec le cercle ABC. Nous désignons par x l'angle CAP. Il est alors facile de voir que

$$\text{arc}\,AP + \text{arc}\,AB \pm \text{arc}\,BE = 2\ \text{dr.},$$

$$\text{arc}\,AP = \text{arc}\,AC - \text{arc}\,PC,$$

$$\pm\,\text{arc}\,BE + \text{arc}\,BD = \pm\,\text{arc}\,BE + \text{arc}\,PC \doteq \text{arc}\,AP.$$

On tire tout de suite de là

$$\widehat{x} = \frac{1 \text{ dr.} + \widehat{B} - \widehat{A}}{3}.$$

On voit donc que cette question dépend de la trisection d'un angle. Réciproquement, *le problème de la trisection de l'angle peut se ramener à celui-ci :*

Déterminer les droites de Simson tangentes au cercle d'Euler.