R. BRICARD

Note au sujet de l'article précédent

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 59-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__59_0>

[K2e]

NOTE AU SUJET DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. R. B.

Dans l'article précédent, M. Fontené établit par le calcul le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle;* DEF *le triangle pédal d'un point* S *par rapport au triangle* ABC; M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC; a, b, c *les intersections respectives des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE. *Les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent en un point qui appartient au cercle* DEF *et au cercle* MNP.

Voici une démonstration géométrique et très élémentaire de cette élégante proposition :

Construisons le cercle ANP, comme l'indique la figure ci-après [1]. Il contient le point H, centre du cercle circonscrit à ABC et orthocentre du triangle MNP. Ce point H est, en outre, diamétralement opposé à A sur le cercle ANP. Appelons K_1 le second point où la droite SH rencontre le cercle ANP. Les points E, F, K_1, sommets d'angles droits dont les côtés passent par les points S et A, sont sur un cercle de diamètre SA. Ce même cercle contient aussi le point D_1, projection du point S sur la parallèle à BC menée par le point A (D_1 est symétrique de D par rapport à NP).

[1] C'est par hasard que la droite EF est tangente au cercle ANP.

Je dis *que les points* a, K_1, D_1 *sont en ligne droite.*

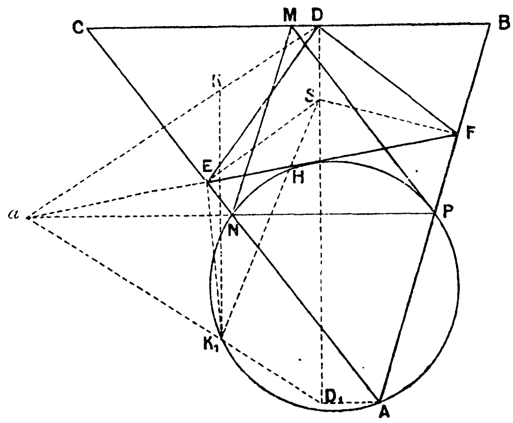
En effet, d'après une propriété bien connue du quadrilatère complet, le point K_1, qui appartient aux cercles ANP, AEF, appartient aussi au cercle aEN. On a donc

$$\widehat{aK_1E} = \widehat{aNE}.$$

D'autre part, le quadrilatère inscriptible SEK_1D_1 donne

$$\widehat{EK_1D_1} = \pi - \widehat{D_1SE} = \pi - \widehat{aNE},$$

puisque les deux angles D_1SE, aNE ont leurs côtés



deux à deux perpendiculaires. On a donc finalement

$$\widehat{aK_1E} = \pi - \widehat{EK_1D_1},$$

ce qui établit l'assertion faite plus haut.

Appelons enfin K le point symétrique de K_1 par rapport à NP; K est sur la droite aD et l'on a

$$aK.aD = aK_1.aD_1 = aE.aF.$$

Ainsi, les points K, D, E, F sont sur un même cercle. D'autre part, le point K est évidemment sur le cercle MNP. On voit donc que la droite Da passe par l'un des points communs aux cercles DEF, MNP. Il en est de même des droites Eb, Fc, et *la symétrie exige que ce point d'intersection soit le même, quelle que soit la droite considérée* (*voir* plus loin).

Le théorème est ainsi établi, et l'on voit même que le point K reste fixe lorsque le point S décrit une droite σ passant par le centre H du cercle ABC : ce fait, signalé par M. Fontené, rend compte de l'existence d'un lieu du point K, lorsque S varie dans le plan. Si l'on se donne le point K sur le cercle MNP, on pourra construire les symétriques K_1, K_2, K_3, lesquels sont sur une même droite σ passant par l'orthocentre H du triangle MNP (Steiner); inversement, si l'on se donne la droite σ, on en déduira le point K, et l'on voit que l'existence de ce point, affirmée ci-dessus par raison de symétrie, peut s'établir par un raisonnement formel.