NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 561-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__561_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un point* M, *de masse* 1, *est assujetti à rester sur la surface* S *définie par les équations*

$$x = u\cos\psi,\qquad y = u\sin\psi,\qquad z = m\psi;$$

il est attiré vers l'axe des z par une force $\frac{m^4\omega^2}{u^3}$; *à l'instant initial, on a*

$$u = m,\qquad \psi = 0,\qquad \frac{du}{dt} = \frac{m\omega}{\sqrt{2}},\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{2}.$$

Déterminer le mouvement de M *et sa pression sur* S.

SOLUTION.

$$(u^2 + m^2)\frac{d\psi}{dt} = m^2\omega, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{m^3\omega}{u\sqrt{u^2+m^2}},$$

$$N = \frac{2m^6\omega^2}{u(u^2+m^2)^2}.$$

II. *Une plaque très mince, homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, a la forme d'un triangle isoscèle* OAB *dont la hauteur* OH, *bissectrice de l'angle* O, *est égale à h et la base* AB *à $h\sqrt{6}$. La plaque peut tourner autour du sommet* O *qui est fixe.*

Déterminer son mouvement en supposant qu'à l'instant initial elle est animée d'une rotation 2ω *autour d'un axe qui se projette sur* OAB *suivant* OH *et fait avec cette droite un angle de* 30°.

SOLUTION.

Les moments principaux relatifs au point O sont proportionnels à 1, 2, 3 et l'on est dans le cas simple du mouvement de Poinsot (B = D).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à* $0^s,001$ *près, le temps que met un point pesant pour parcourir une circonférence de* 1^m *de rayon située dans un plan vertical. La vitesse au point le plus haut est* $2\sqrt{g}$ ($g = 9^m,809$). *On demande la vitesse au point le plus bas du cercle.*

(Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un losange articulé, pesant,* OABA', *est constitué par quatre tiges de même masse* M, *de même longueur l. L'un des sommets* O *du losange est fixe; le sommet opposé* B *décrit la verticale descendante* Oz_1 *du point* O. *Les liaisons sont sans frottement.*

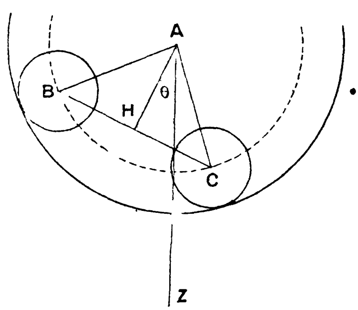
On désigne par 2θ *l'angle* AOA' *du losange, par* ψ *l'angle que fait le plan du losange avec un plan vertical fixe* x_1Oz_1.

1° *Déterminer le mouvement du système et discuter, dans le cas particulier où la dérivée de* θ *par rapport au temps est nulle à l'instant initial.*

2° *On considère un second système identique au précédent, assujetti aux mêmes liaisons et, en plus, à une liaison nouvelle obligeant le plan du losange à tourner uniformément autour de* Oz_1. *Déterminer le mouvement du système.*

(La discussion n'est pas demandée pour cette dernière question.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène d'épaisseur négligeable a la forme d'un triangle équilatéral* ABC *de côté* a. *Ce triangle est pesant et se trouve assujetti à*



se mouvoir dans un plan vertical fixe. En B *et* C *sont implantés, normalement au plan du triangle, deux clous de masses et de dimensions négligeables. Chacun de ces clous est l'axe de deux roues planes infiniment minces, circulaires, pesantes, qui lui sont normales et qui sont équidistantes du plan du triangle.*

Les quatre roues ont même masse m *et même rayon* r. *Elles s'appuient sur la surface intérieure d'un cylindre circulaire droit de rayon* $a + r$ *dont les génératrices sont normales au plan de la plaque; elles ne peuvent que rouler sans glisser sur les cylindres. Les liaisons sont sans frottement.*

Soient AH *la hauteur de* ABC *issue de* A, θ *l'angle* *de* AH *avec la verticale descendante* Az, θ' *la dérivée de* θ *par rapport au temps* t.

On demande : 1° *De trouver le moment d'inertie* I_A *du triangle* ABC *relativement à son sommet* A;

2° *De calculer (pour des valeurs de* θ *et* θ' *supposées connues) les vitesses angulaires des roues par rapport à des axes de directions fixes;*

3° *D'écrire l'équation du mouvement du système, de déterminer la durée des oscillations infiniment petites autour de la position d'équilibre stable;*

4° *De calculer les réactions exercées par les clous sur la plaque* ABC. *On admet que ces réactions sont dans le plan de la plaque, normales au cercle décrit par les points* B *et* C. (Juillet 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mouvement d'un cône solide, homogène et pesant, dont le sommet est assujetti à se déplacer sans frottement sur un plan fixe incliné sur l'horizon.*

2° *Étudier en détail le mouvement et, en particulier, reconnaître si le cône vient toucher le plan fixe, dans les hypothèses suivantes : le rayon de base du cône est égal à* 1, *la hauteur est égale à* 2, *le cosinus de l'angle du plan fixe avec l'horizon est égal à* $\frac{3}{155}$. *A l'origine du mouvement, l'axe du cône est immobile et perpendiculaire au plan fixe; le cône est animé d'une rotation donnée autour de son axe.*

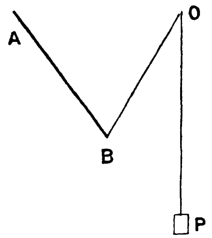
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Distribution des vitesses dans un solide en mouvement.*

Quel est, à un instant donné, le lieu des points du solide dont les vitesses concourent en un point donné?

(Juillet 1906.)

Rennes.

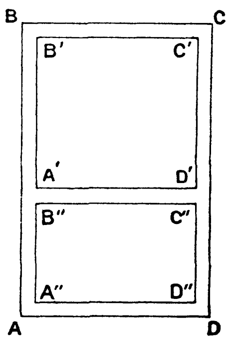
ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre rigide* AB, *homogène et pesante, peut tourner librement autour de son extrémité* A. *A l'autre extrémité* B *s'attache un fil flexible inextensible* *et de masse négligeable* BOP, *qui vient passer en* O *dans un anneau très petit, et retombe ensuite verticalement, supportant un poids* P. *Tous les éléments restent dans un*



même plan vertical; les points fixes A *et* O *sont sur une même horizontale, la distance* AO *est égale à la longueur de la barre; il n'y a pas de frottement.*

Déterminer les positions d'équilibre et étudier les mouvements possibles du système, en particulier les petits mouvements. Calculer les réactions.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Centre de percussion d'un rectangle mobile autour d'un de ses côtés* AB.



Le rectangle considéré comprend un châssis formé d'un cadre et d'une traverse, qui limitent deux panneaux A'B'C'D', A''B''C''D''.

Le cadre et la traverse ont la même densité ρ; *les panneaux ont la densité* $\rho' = \frac{2}{3}\rho$.

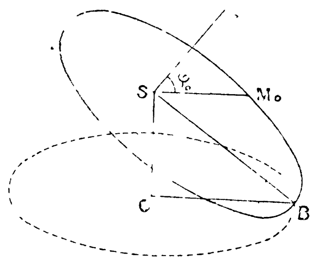
Dimensions :

$$AB = 2^m,10, \qquad BC = 0^m,80,$$
$$A'B' = 1^m, \qquad B'C' = 0^m,60,$$
$$B''A' = 0^m,10 \qquad A''B'' = 0^m,80.$$

Largeur du cadre : $0^m,10$. (Juillet 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne un cône circulaire droit dont la base repose sur un plan horizontal, dont l'axe* SO *est vertical et qui est absolument fixe.*



Une roue circulaire dont le rayon est égal à la génératrice SB *du cône porte à sa circonférence un canal annulaire de très petite section, dans l'intérieur duquel on a introduit une sphère homogène pesante de masse* m, *d'un très petit diamètre égal à celui du canal et qui peut glisser sans frottement dans ce canal.*

Le centre de la roue s'appuie sur le sommet S *du cône fixe; elle est assujettie à rouler d'un mouvement uniforme sur le cône, son plan restant constamment tangent au cône, de sorte que les rayons de la roue viennent s'appliquer sur les génératrices du cône et les points de la circonférence de la roue sur les points de la circonférence de la base du cône.*

On demande d'étudier le mouvement relatif de la sphère dans le canal.

Données : α *l'angle au sommet du cône;* ω *la vitesse an-*

gulaire de rotation constante du plan de la roue autour de chaque génératrice du cône; R *le rayon de la roue;* m *la masse de la petite sphère mobile;* φ_0 *l'angle formé par le rayon* SM_0 *de la roue avec l'horizontale* Sx *à l'instant initial.*

On supposera nulle la vitesse initiale relative.

Epreuve pratique. — *La densité* δ *en tout point d'une sphère de rayon égal à l'unité suit la loi*

$$\delta = \frac{3}{2} e^{-r}, \qquad e = 2,71828,$$

r *désignant la distance du point au centre.*

On demande :

1° *La masse totale de la sphère;*

2° *Le moment d'inertie de la sphère autour d'un de ses diamètres;*

3° *En supposant cette sphère animée d'un mouvement de translation uniforme de* $\frac{1}{200}$ *d'unité de longueur par seconde et d'un mouvement de rotation autour d'un de ses diamètres de un tour en 24 heures, de calculer la distance au centre de la percussion capable de lui communiquer ce double mouvement.* (Juillet 1906.)