NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur le cercle pédal

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 55-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__55_1>

[K2e]

SUR LE CERCLE PÉDAL;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soit un triangle ABC. Le cercle pédal d'un point S (cercle circonscrit au triangle pédal de ce point) passe au centre K de l'hyperbole équilatère ABCS (*Nouv. Ann.*, 1905, p. 414). Deux points inverses S et S' ont même cercle pédal; celui-ci est rencontré par le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points K et K', qui sont les centres des deux hyperboles équilatères ABCS, ABCS'; on peut remarquer que ces deux courbes sont les transformées par inversion des deux droites OS', OS, en appelant O le centre du cercle ABC.

Soit DEF le triangle pédal relatif au point S; soient M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC; si a, b, c sont respectivement les intersections des droites NP et EF, PM et FD, MN et DE, *les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent au point* K'. Ce point K' doit être considéré ici comme étant le centre de l'hyperbole équilatère qui est la transformée par inversion de la droite OS.

Ce théorème, dont on trouvera plus loin une démonstration analytique, donne la solution de la question **2021** : le quadrangle DEFK′ étant inscrit au cercle pédal, son triangle diagonal *abc* est conjugué par rapport à ce cercle. La démonstration géométrique semble devoir être assez difficile : je n'ai rien trouvé.

Lorsque la droite SS′ passe au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, les deux points K et K′ sont confondus, et le cercle pédal est tangent au cercle des neuf points (*Nouv. Ann.*, 1905, p. 504); on a alors une extension de la construction donnée par Hamilton pour le point de contact K du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.

2. Je démontrerai le théorème énoncé en vérifiant que les trois droites DE, MN, FK′ sont concourantes. Prenons comme triangle de référence le triangle ABC, et soient p, q, r les coordonnées du point S. L'équation de l'hyperbole équilatère ABCS′, déduite de celle de la droite OS, est

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0,$$

sous les conditions

$$\begin{aligned} \alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C &= 0, \\ \alpha p \quad + \beta q \quad + \gamma r \quad &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre K′ de cette courbe sont, d'après un calcul facile,

$$x_0 = \alpha(\beta \sin B + \gamma \sin C - \alpha \sin A), \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

comme on a

$$\frac{\alpha}{q \cos C - r \cos B} = \frac{\beta}{r \cos A - p \cos C} = \frac{\gamma}{p \cos B - q \cos A},$$

on obtient, sauf un changement de signes,

$$x_0 = (q\cos C - r\cos B)[q\sin B - r\sin C + p\sin(B - C)],$$
$$y_0 = (r\cos A - p\cos C)[r\sin C - p\sin A + q\sin(C - A)],$$
$$z_0 = (p\cos B - q\cos A)[p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B)].$$

La droite SF ayant pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$z(p\cos A - q\cos B) - x(r\cos A + q) + y(r\cos B + p) = 0,$$

l'équation de FK' est

$$\frac{x(r\cos A + q) - y(r\cos B + p)}{x_0(r\cos A + q) - y_0(r\cos B + p)} = \frac{z}{z_0}.$$

Cette équation peut être simplifiée. Lorsque la droite OS est perpendiculaire sur AB, de sorte que l'on a

$$p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B) = 0,$$

l'hyperbole équilatère ABCS' qui en est la transformée par inversion a son centre au milieu de AB, puisque l'on a alors $z_0 = 0$; les points F et K' sont confondus, et la droite FK' n'est pas déterminée. Il suit de là que le dénominateur du premier membre de l'équation ci-dessus, après qu'on y a remplacé x_0 et y_0 par leurs expressions en p, q, r, renferme en facteur la quantité

$$p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B)$$

qui entre aussi dans l'expression de z_0; pour faire la division on ordonne par rapport à r, le terme en r^3 disparaît au dividende, ce qui réduit le quotient à être de la forme $Hr + K$, et le calcul des coefficients H et K, que l'on peut déterminer indépendamment l'un de l'autre, donne pour ce quotient

$$Q = r\sin C(p\sin B + q\sin A) - \cos C(p^2 + 2pq\cos C + q^2);$$

l'équation de FK′ est donc

$$(\mathrm{FK}') \qquad \frac{x(r\cos A + q) - y(r\cos B + p)}{Q} = \frac{z}{p\cos B - q\cos A}.$$

Les équations des droites SD et SE étant

$$x(q\cos B - r\cos C) - y(p\cos B + r) + z(p\cos C + q) = 0,$$
$$y(r\cos C - p\cos A) - z(q\cos C + p) + x(q\cos A + r) = 0,$$

l'équation de DE est

$$(\mathrm{DE}) \qquad \frac{q\cos A + r}{q\cos C + p}x + \frac{p\cos B + r}{p\cos C + q}y - z = 0;$$

l'équation de MN est d'ailleurs

$$(\mathrm{MN}) \qquad x\sin A + y\sin B - z\sin C = 0.$$

En écrivant que DE, MN, FK′ sont concourantes, on a la condition suivante qui doit avoir lieu d'elle-même :

$$\begin{vmatrix} (q\cos A + r)(p\cos C + q) & (p\cos B + r)(q\cos C + p) & (p\cos C + q)(q\cos C - p) \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ (r\cos A + q)(p\cos B - q\cos A) & (r\cos B + p)(q\cos A - p\cos B) & Q \end{vmatrix}$$

or, si l'on additionne les éléments des deux lignes extrêmes, on obtient les éléments de la seconde ligne multipliés par les facteurs communs

$$qr\sin A + rp\sin B + pq\sin C;$$

le déterminant est donc bien égal à zéro.