Nouvelles annales de mathématiques

PARROD

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1906). Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 546-553

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__546_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE (¹);

PAR M. PARROD.

1° Éliminons y, p, z entre les quatre premières équations, après simplification, il vient

$$x\,du + d\alpha - q\,x\,d\beta = 0$$

(¹) *Voir* l'énoncé dans le numéro de septembre, p. 408.

ou

$$x(u'_\alpha\, d\alpha + u'_\beta\, d\beta) + d\alpha - qx\, d\beta = 0.$$

Identifions et résolvons les équations

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{u'_\alpha}, & p &= u - \beta u'_\beta, \\ y &= \beta x, & q &= u'_\beta. \\ z &= \alpha + ux, \end{aligned}$$

Lorsque

$$u''_{\alpha^2} = 0, \qquad u = \alpha H + H_1,$$

H et H_1 étant des fonctions de β seule; alors x, y et z sont seulement fonctions de β, la surface S se réduit à une courbe.

Cette condition est nécessaire, en effet; il faut que

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{y'_\alpha}{y'_\beta} = \frac{z'_\alpha}{z'_\beta}$$

ou

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{\beta x'_\alpha}{\beta x'_\beta + x} = \frac{1 + u'_\alpha x + u x'_\alpha}{u'_\beta x + u x'_\beta};$$

or

$$1 + u'_\alpha x = 0,$$

donc ces égalités n'ont lieu que si

$$x'_\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad u''_{\alpha^2} = 0.$$

L'équation générale des lignes asymptotiques est

$$D\, d\alpha^2 + 2 D'\, d\alpha\, d\beta + D''\, d\beta^2 = 0.$$

Le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

on a

$$\begin{aligned} D &= p x''_{\alpha^2} + q y''_{\alpha^2} - z''_{\alpha^2} = + u''_{\alpha^2} x, \\ D' &= p x''_{\alpha\beta} + q y''_{\alpha\beta} - z''_{\alpha\beta} = 0, \\ D'' &= p x''_{\beta^2} + q y''_{\beta^2} - z''_{\beta^2} = - u''_{\beta^2} x. \end{aligned}$$

L'équation demandée est

$$u''_{\alpha^2}\,d\alpha^2 - u''_{\beta^2}\,d\beta^2 = 0.$$

Le coefficient de $d\alpha\, d\beta$ est nul, donc les $\alpha =$ const., $\beta =$ const. sont conjuguées sur S.

L'équation du plan tangent nous permet de voir que ce plan passe par le point fixe (o, o, α); ce point est le sommet du cône, le lieu est l'axe des z.

2° Dérivons trois fois le premier membre de l'équation du plan tangent

$$(u - \beta u'_\beta)X + u'_\beta Y - Z + \alpha = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} (u'_\alpha - \beta u''_{\alpha\beta})X + u''_{\alpha\beta} Y + 1 &= 0, \\ (u''_{\alpha^2} - \beta u'''_{\alpha^2\beta})X + u'''_{\alpha^2\beta} Y &= 0, \\ (u'''_{\alpha^3} - \beta u^{\text{IV}}_{\alpha^3\beta})X + u^{\text{IV}}_{\alpha^3\beta} Y &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations doivent être identiques:

$$\frac{u'''_{\alpha^3}}{u''_{\alpha^2}} = \frac{u^{\text{IV}}_{\alpha^2\beta}}{u'''_{\alpha^2\beta}}.$$

Intégrons, on a d'abord

$$u = M u'_\beta + \alpha N + P,$$

M, N et P étant des fonctions quelconques de β seule.

Pour achever l'intégration, posons

$$u = vK + \alpha B_1 + B_2,$$

K étant une fonction de β.

L'équation différentielle devient

$$v(K - MK') = v'_\beta MK$$

en posant

$$B_1 = MB'_1 + N,$$
$$B_2 = MB'_2 + P,$$

et

$$\log v = \int \frac{K - MK'}{MK} d\beta + \log A,$$

le produit $v\frac{1}{A}$ est une fonction $\frac{B}{K}$ de β seule; donc

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante; l'équation du plan tangent devient

$$[AB + \alpha B_1 + B_2 - \beta(AB' + \alpha B'_1 + B'_2)]X$$
$$+ (AB' + \alpha B'_1 + B'_2)Y - Z + \alpha = 0.$$

Ce plan passe le point fixe

$$\begin{aligned}(B - \beta B')X + B'Y \quad &= 0,\\ (B_1 - \beta B'_1)X + B'_1 Y + 1 &= 0,\\ (B_2 - \beta B'_2)X + B'_2 Y - Z &= 0.\end{aligned}$$

Lorsque

$$\begin{aligned}u &= AB + \alpha B_1 + B_2,\\ u'_\beta &= AB' + \alpha B'_1 + B'_2.\end{aligned}$$

L'équation différentielle linéaire est

$$(u - \alpha B_1 - B_2)B' - (u'_\beta - \alpha B'_1 - B'_2)B = 0,$$

où

$$u = p + q\frac{y}{x}, \qquad \beta = \frac{y}{x}, \qquad u'_\beta = q, \qquad \alpha = z - px - py$$

la substitution donne une équation de la forme

$$Pp + Qq = R.$$

Les équations d'une caractéristique sont

$$\frac{y}{x} = \beta \qquad \text{et} \qquad z - px - qy = \alpha,$$

où p et q sont des fonctions de $\frac{y}{x}$ et du paramètre α: A étant une fonction quelconque donnée de α.

Les surfaces intégrales sont les surfaces S, et les équations qui définissent le sommet du cône relatif à une ligne $\beta = \text{const.}$ sont indépendantes de α et de A.

3° Les équations de la droite D étant

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 \quad &= 0 \\ a_2 x + b_2 y \pm c_2 z &= 0 \end{aligned} \qquad (c_1 c_2 \neq 0),$$

le système formé par ces deux équations et les trois équations précédentes, définissant le sommet du cône, doivent avoir une solution ; donc

$$\begin{aligned} a_1 B' - b_1(B - \beta B') + c_1(BB'_1 - B_1 B') &= 0, \\ a_2 B' - b_2(B - \beta B') + c_2(BB'_2 - B_2 B') &= 0. \end{aligned}$$

La fonction B étant quelconque, mais donnée,

$$\frac{BB'_1 - B_1 B'}{B^2} = f(\beta).$$

Intégrons

$$B_1 = F_1(\beta) + B \times \text{const.},$$

de même

$$B_2 = F_2(\beta) + B \times \text{const.};$$

donc

$$u = (A + \alpha \times \text{const.} + \text{const.})B + \alpha F_1(\beta) + F_2(\beta).$$

Posons

$$\begin{aligned} B_1 &= h_1 \beta + k_1, \\ B_2 &= h_2 \beta + k_2. \end{aligned}$$

Les deux équations différentielles deviennent

$$\begin{aligned} B(h_1 c_1 - b_1) + B'[\beta(b_1 - h_1 c_1) + a_1 - k_1 c_1] &= 0, \\ B(h_2 c_2 - b_2) + B'[\beta(b_2 - h_2 c_2) + b_2 - k_2 c_2] &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations sont satisfaites quelle que soit B, si

$$h_1 = \frac{b_1}{c_1}, \qquad k_1 = \frac{a_1}{c_1}, \qquad h_2 = \frac{b_2}{c_2}, \qquad k_2 = \frac{a_2}{c_2}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est dans ce cas

$$A'' B \, d\alpha^2 - A B'' \, d\beta^2 = 0.$$

Les variables sont séparées

$$\int \sqrt{\frac{A''}{A}} \, d\alpha = \pm \int \sqrt{\frac{B''}{B}} \, d\beta.$$

En rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D, le lieu des sommets des cônes relatifs aux lignes $\alpha =$ const. sera le nouvel axe des z, c'est-à-dire la droite D, et l'autre lieu sera l'ancien axe des z. D'après le théorème de Königs, les plans passant par la droite D et les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur cette droite déterminent également deux réseaux de lignes conjuguées; donc les courbes $\alpha =$ const. sont situées dans des plans passant par la droite D : il est facile de le vérifier en éliminant B et β entre les expressions des coordonnées qui suivent, on a

$$\frac{a_2 x + b_2 y - c_2 z}{a_1 x + b_1 y + c_1} = f(\alpha).$$

Les équations de l'axe des z primitifs dans ce nouveau système d'axes étant

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$
$$a_4 x + b_4 y - c_4 z = 0.$$

Cette réciprocité nous montre que, dans le nouveau système d'axes, les expressions des coordonnées seraient de la même forme que dans l'ancien système après avoir permuté α et β puis remplacé les coefficients $a_1, \ldots, c_2$ par $a_3, \ldots, c_4$.

On obtiendra les expressions des coordonnées d'un point d'une surface du deuxième groupe en remplaçant les coefficients $a_1, \ldots, c_2$ par $a_3, \ldots, c_4$.

Rendons homogènes les coordonnées, on a pour les deux groupes de surfaces

$$\begin{aligned}
\rho_1 x &= -1,\\
\rho_1 y &= -\beta,\\
\rho_1 z &= \alpha A'B - AB + \rho_1(h_2 y + k_2 x),\\
\rho_1 t &= A'B - \rho_1(h_1 y + k_1 x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 x &= -1,\\
\rho_2 y &= -\beta,\\
\rho_2 z &= \alpha A'B - AB + \rho_2(h_4 y + k_4 x),\\
\rho_2 t &= A'B - \rho_2(h_3 y + k_3 x).
\end{aligned}$$

L'un des groupes se déduit de l'autre par la transformation homographique

$$\begin{gathered}
x = X, \qquad y = Y,\\
z - h_2 y - k_2 x = Z - h_4 Y - k_4 X,\\
t + h_1 y + k_1 x = T + h_3 Y + k_3 X.
\end{gathered}$$

D'ailleurs, la transformation homographique

$$\begin{aligned}
x &= -X,\\
y &= -Y,\\
z - h_2 y - k_2 x &= Z,\\
t + h_1 y + k_1 x &= T
\end{aligned}$$

ramène l'équation d'une surface du premier groupe à la forme plus simple

$$\begin{aligned}
\rho x &= 1,\\
\rho y &= \beta,\\
\rho z &= \alpha A'B - AB,\\
\rho t &= A'B
\end{aligned}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{A'B},\\
y &= \frac{\beta}{A'B},\\
z &= \alpha - \frac{A}{A'}.
\end{aligned}$$

z est une fonction de α seule; donc l'équation d'une surface est de la forme

$$x = f(z)\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

f et φ étant des fonctions quelconques.