NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Volume d’un tétraèdre en fonction des arêtes ; démonstration géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 530-531

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__530_0>

[K13c]

VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES ; DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Étant donné un tétraèdre ABCD, soient α, β, γ, δ les coefficients barycentiques dont il faut affecter les sommets pour que le barycentre soit le centre O de la sphère circonscrite. On a, pour tout point M de l'espace,

$$\sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda\, MO^2 + \text{const.};$$

on détermine la constante en mettant M au point O, et l'on a

$$\sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda (MO^2 + R^2).$$

Si l'on met successivement le point M en A, B, C, D, en désignant par a, b, c les côtés du triangle ABC, et par a', b', c' les longueurs DA, DB, DC, on a

$$\begin{array}{l} \beta c^2 + \gamma b^2 + \delta a'^2 = 2\lambda R^2, \\ \alpha c^2 \quad + \gamma a^2 + \delta b'^2 = 2\lambda R^2, \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

on a d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \lambda.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 2R^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 2R^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 2R^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 2R^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 1 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 2R^2 + \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les lignes de ce dernier déterminant par $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, $\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$, puis les trois premières colonnes par $\frac{b'}{b}\frac{c'}{c}$, $\frac{c'}{c}\frac{a'}{a}$, $\frac{a'}{a}\frac{b'}{b}$, ce qui ne change pas sa valeur, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & cc' & bb' & aa' \\ cc' & 0 & aa' & bb' \\ bb' & aa' & 0 & cc' \\ aa' & bb' & cc' & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$-(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')\ldots,$$

ou, d'après la formule de Brassine [1],

$$-16 \times (6VR)^2.$$

On a donc

$$8 \times (6V)^2 = \Delta,$$

en appelant Δ le déterminant qui est multiplié par $2R^2$ dans la relation écrite plus haut.

C'est la formule cherchée.

---

[1] La formule de Brassine (*Nouvelles Annales*, 1847, p. 226) a été retrouvée par de Staudt (*Ibid.*, 1859, p. 441). J'ai montré ailleurs que cette formule s'obtient en transformant par rayons vecteurs réciproques la formule $S = \sqrt{p(p-a)\ldots}$; or il me semble maintenant que j'ai vu autrefois cette démonstration dans les *Nouvelles Annales*.