

G. FONTENÉ

Volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes ; démonstration géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6 (1906), p. 530-531

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_530_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K13c]

VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES ;
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Étant donné un tétraèdre ABCD, soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coefficients barycentriques dont il faut affecter les sommets pour que le barycentre soit le centre O de la sphère circonscrite. On a, pour tout point M de l'espace,

$$\sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda MO^2 + \text{const.};$$

on détermine la constante en mettant M au point O, et l'on a

$$\sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda(MO^2 + R^2).$$

Si l'on met successivement le point M en A, B, C, D, en désignant par a, b, c les côtés du triangle ABC, et par a', b', c' les longueurs DA, DB, DC, on a

$$\begin{aligned} \beta c^2 + \gamma b^2 + \delta a'^2 &= 2\lambda R^2, \\ \alpha c^2 + \gamma a^2 + \delta b'^2 &= 2\lambda R^2, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \lambda.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 2R^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 2R^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 2R^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 2R^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 1 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 2R^2 + \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les lignes de ce dernier déterminant par $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, puis les trois premières colonnes par $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$, $\frac{c'}{c}$, $\frac{a'}{a}$, $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, ce qui ne change pas sa valeur, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & cc' & bb' & aa' \\ cc' & 0 & aa' & bb' \\ bb' & aa' & 0 & cc' \\ aa' & bb' & cc' & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$-(aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa')(cc' + aa' - bb') \dots,$$

ou, d'après la formule de Brassine (1),

$$-16 \times (6VR)^2.$$

On a donc

$$8 \times (6V)^2 = \Delta,$$

en appelant Δ le déterminant qui est multiplié par $2R^2$ dans la relation écrite plus haut.

C'est la formule cherchée.

(1) La formule de Brassine (*Nouvelles Annales*, 1847, p. 226) a été retrouvée par de Staudt (*Ibid.*, 1859, p. 441). J'ai montré ailleurs que cette formule s'obtient en transformant par rayons vecteurs réciproques la formule $S = \sqrt{p(p-a)} \dots$; or il me semble maintenant que j'ai vu autrefois cette démonstration dans les *Nouvelles Annales*.