ED. COLLIGNON

Théorie élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__49_0>

[R7fα]

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PETITES OSCILLATIONS D'UN PENDULE SIMPLE;

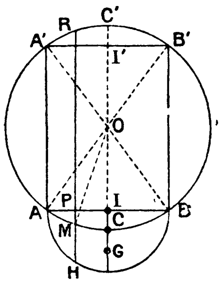
PAR M. ED. COLLIGNON.

I. Soient :

O le centre fixe auquel est attaché le fil, inextensible et sans masse, qui soutient le point pesant mobile M;
OA = OB = OM = l le rayon de la circonférence décrite par le point mobile;
l la longueur du pendule simple;
ACB l'arc, supposé très petit, que ce point parcourt dans son mouvement oscillatoire;
IC la flèche de cet arc.

Lorsque le point mobile, parti sans vitesse du point A (*fig.* 1), passe au point M, il possède une

Fig. 1.



vitesse v donnée par la formule

$$v = \sqrt{2g \times \text{PM}},$$

puisqu'il tombe de la hauteur PM, à partir du niveau AB où sa vitesse est nulle.

Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'à la rencontre en R avec la circonférence. Nous aurons

$$\mathrm{PM} \times \mathrm{PR} = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{PM} = \frac{\mathrm{PA} \times \mathrm{PB}}{\mathrm{PR}}.$$

Sur la corde AB comme diamètre décrivons la demi-circonférence AHB, et soit H le point où l'ordonnée PM prolongée la rencontre. On aura

$$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$$

et, par suite,

$$\mathrm{PM} = \frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\mathrm{PR}}.$$

On en déduit pour la vitesse

$$(1) \qquad v = \sqrt{2g}\,\frac{\mathrm{PH}}{\sqrt{\mathrm{PR}}},$$

équation qui va nous servir à déterminer approximativement la *vitesse moyenne* u du point mobile dans son parcours de l'arc ACB.

Les quantités PH et PR sont les seules variables dans l'équation (1), mais elles varient dans des conditions très différentes : PH varie de 0 à $\frac{1}{2}$AB, puis de $\frac{1}{2}$AB à 0, suivant les ordonnées du demi-cercle AHB rapporté à son diamètre AB; au contraire, la quantité PR reste toujours comprise entre les limites

$$\mathrm{AA}' = \mathrm{BB}' = 2l\cos\alpha, \qquad \mathrm{IC}' = l(1 + \cos\alpha),$$

en appelant α l'angle AOC = AOB, qui mesure l'écart initial. *Si cet angle est très petit,* on a sensiblement

$$AA' = 2l - l\alpha^2 \qquad \text{et} \qquad IC' = 2l - l\frac{\alpha^2}{2},$$

de sorte que la grandeur PR est très peu variable, et s'écarte peu d'une certaine valeur moyenne qu'on peut regarder comme constante ; ce qui introduit dans l'équation (1) une notable simplification.

II. Supposons d'abord α infiniment petit. Les quantités $l\alpha^2$ et $l\frac{\alpha^2}{2}$ sont alors négligeables vis-à-vis de $2l$, et les deux limites de PR deviennent égales à $2l$. On a, par conséquent,

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\text{PH}, \tag{2}$$

de sorte que la moyenne u des valeurs de v correspond à la moyenne des valeurs de PH quand le point H parcourt la demi-circonférence AHB. Cette valeur moyenne est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de l'arc AHB à son diamètre AB, ou, en d'autres termes, l'ordonnée du centre de gravité de cet arc. On a, par une formule connue,

$$IG = \frac{AB}{\pi} = \frac{2l\sin\alpha}{\pi}$$

et, par suite,

$$u = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\sin\alpha}{\pi}. \tag{3}$$

La durée t de l'oscillation simple s'obtient en divisant la longueur ACB du chemin parcouru par la vitesse moyenne u du mobile ; on a donc

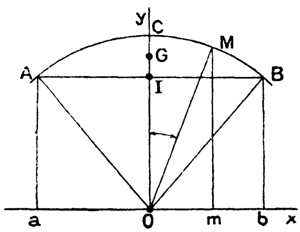
$$t = \frac{2l\alpha}{2l\sin\alpha}\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{4}$$

en observant que le rapport $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ a pour limite l'unité, lorsque l'angle α est infiniment petit.

III. Cette formule (4) s'obtient, comme on le voit, sans intégration, pourvu que l'on connaisse la position du centre de gravité d'un arc de cercle homogène; or cette détermination s'obtient égalemeut sans intégration en s'aidant de l'équation d'un mouvement circulaire uniforme projeté sur un diamètre fixe.

En effet, soit ACB un arc de cercle, décrit du point O comme centre avec $OA = OB = R$ pour rayon (*fig.* 2).

Fig. 2.



Menons la bissectrice OCY de cet arc, et traçons l'arc OX perpendiculaire à OY.

Imaginons un point M qui parcoure l'arc ACB d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire constante, ω, autour du centre O. Projetons le mouvement sur l'axe OX, et soit $Om = x$ l'abscisse du point m, projection de M, à l'époque t; nous aurons, pour l'équation du mouvement projeté,

$$x = R \sin \omega t,$$

en comptant le temps t à partir du passage du point m en O, ou du point M en C. La vitesse v de ce mouvement sera donnée par l'équation

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{R}\omega \cos\omega t = \omega \mathrm{R} \cos\omega t = \omega y,$$

en appelant y l'ordonnée $m\mathrm{M}$ du point M.

La vitesse moyenne u du point m dans le parcours du segment ab, projection de l'arc total, sera le produit ωy_1 de la vitesse angulaire ω par l'ordonnée y_1, moyenne de toutes les ordonnées y des points de l'arc circulaire, c'est-à-dire par l'ordonnée OG du centre de gravité de cet arc. Nous poserons donc

$$u = \omega y_1 = \frac{ab}{t} = \frac{\mathrm{AB}}{t},$$

t étant la durée du parcours $ab = \mathrm{AB}$ du point projeté de a en b, ou de A en B le long de la corde. Cette durée est égale à celle du parcours de l'arc ACB par le point M, et l'on a aussi

$$\omega t = \frac{\mathrm{arc\,ACB}}{\mathrm{R}}.$$

Par conséquent, on a à la fois les deux relations

$$\omega y_1 = \frac{\mathrm{AB}}{t} \qquad \text{et} \qquad \omega t = \frac{\mathrm{arc\,ACB}}{\mathrm{R}}.$$

Entre ces deux équations éliminons le produit ωt; il viendra, en résolvant par rapport à y_1,

$$y_1 = \frac{\mathrm{R} \times \mathrm{corde\,AB}}{\mathrm{arc\,ACB}},$$

formule connue de la distance au point O du centre de gravité de l'arc ACB.

En appelant θ le demi-angle au centre, on transforme la formule en la suivante :

$$y_1 = \frac{\mathrm{R}\sin\theta}{\theta},$$

et, appliquée à la demi-circonférence AHB, elle donne

$$IG = \frac{AB}{\pi} = \frac{2l\sin\alpha}{\pi},$$

équation dont nous avons fait usage ([1]).

IV. Supposons en second lieu que l'angle α ne soit pas infiniment petit, mais qu'il soit assez petit pour qu'on puisse poser

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

à titre d'approximation. Les limites de PR sont alors différentes, mais d'une petite quantité, et l'on pourra substituer à PR variable une valeur constante, que nous prendrons égale à

$$PR = 2l\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right);$$

cela revient à poser

$$PR = \frac{AA' + 2IC'}{3},$$

en affectant du coefficient 2 la plus grande limite, maximum de la variable. Il vient alors, en refaisant les calculs,

$$(2') \qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{PH}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{3}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{PH}{1 - \frac{\alpha^2}{6}},$$

$$(3') \qquad \left\{\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\sin\alpha}{\pi\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)}{1 - \frac{\alpha^2}{6}} \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,2l\alpha, \end{aligned}\right.$$

([1]) Cette démonstration a été donnée dans notre *Mécanique*, t. II, § 182 (IVe édit., Hachette).

et, comme $2l\alpha$ est la longueur de l'arc parcouru ACB, on a

$$(4) \qquad t = \frac{2l\alpha}{u} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire la formule trouvée pour α infiniment petit, étendue aux petits arcs α.