NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CARLO BOURLET

Théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 481-503

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__481_0>

[Q1a]

THÉORIE DES PARALLÈLES BASÉE SUR LA TRANSLATION RECTILIGNE ;

PAR M. CARLO BOURLET.

Les *Instructions* qui accompagnent les programmes officiels (27 juillet 1905) de l'enseignement de la Géométrie, dans le premier cycle de l'Enseignement Secondaire, recommandent aux professeurs de « faire un appel constant à la notion de mouvement » et de « lier le parallélisme à la notion de translation ». Beaucoup d'entre eux se sont émus de ces Instructions, et à bon droit, en se demandant si dorénavant on enseignerait dans nos lycées *deux* Géométries : l'une, au premier cycle, où les parallèles seraient définies par la translation ; l'autre, au second cycle, où l'on conserverait l'ancienne méthode.

La question qui se pose est alors de savoir si l'on ne pourrait pas, en définissant les parallèles par la translation, construire une Géométrie aussi rigoureuse que celle que l'on enseigne actuellement et qui puisse être conservée d'un bout à l'autre de l'Enseignement Secondaire. C'est pour y répondre que j'ai rédigé ce petit travail qui n'est, en somme, que le premier Chapitre d'une nouvelle Géométrie où l'on ferait un appel constant à la notion de *déplacement* et où l'on donnerait à la méthode des *groupes de transformations* une place prépondérante.

C'est M. Charles Méray qui, à ma connaissance du moins, a pour la première fois, dans ses *Nouveaux Éléments de Géométrie,* dont la première édition remonte à 1874, fait usage de la translation pour définir les parallèles. En lisant l'Ouvrage de M. Méray, j'avais été frappé de la place qu'y tenait le *postulat* qu'il y a introduit, à savoir que *deux translations peuvent être remplacées par une troisième;* mais l'éminent professeur de l'Université de Dijon, ayant surtout en vue *la fusion* des deux Géométries plane et de l'espace, ne s'était pas préoccupé de réduire le nombre de ses postulats et, à côté de celui que je viens d'énoncer, il en admet bien d'autres. Il admet, par exemple, l'existence d'une infinité de glissières dans la translation rectiligne; il admet aussi que, lorsque deux plans se déduisent l'un de l'autre par translation, toute droite qui rencontre l'un rencontre l'autre. Je me suis alors demandé si, en se plaçant, ce que n'avait pas fait M. Méray, au point de vue de la théorie des groupes, on ne pourrait pas bâtir une Géométrie élémentaire dans laquelle le postulat de M. Méray serait l'*unique* postulat fondamental remplaçant celui d'Euclide.

Reprenant ainsi la chose de fond en comble, je suis parvenu à établir la théorie qui suit, qui diffère totalement de celle de M. Méray quant à l'esprit et s'en écarte notablement quant à l'ordre et à la nature des propositions. Il est clair que, dans un Traité complet de Géométrie, que je pense pouvoir faire paraître bientôt, on étudierait les angles et les rotations, l'homothétie et la similitude dans le même esprit.

Je suis actuellement convaincu que l'introduction d'une telle Géométrie dans notre Enseignement Secondaire constituerait un réel progrès.

Cette nouvelle méthode, substituant aux démonstrations artificielles actuelles d'autres plus naturelles, est plus intuitive, car elle *fait voir* à l'étudiant les déplacements qui permettent de comparer les figures.

Définissant les figures géométriques par les constructions mêmes par lesquelles on les obtient, elle donne lieu à des applications graphiques immédiates. Dès qu'on y a défini le parallélisme de deux droites, on sait tracer deux droites parallèles. On n'est pas obligé d'exposer, comme cela a lieu maintenant, deux Livres entiers de Géométrie, avant de pouvoir justifier la moindre construction élémentaire.

Enfin, et ce n'est pas là l'un de ses moindres avantages, cette nouvelle Géométrie se prête admirablement aux simplifications nécessaires pour les débutants, *et cela sans en modifier ni l'esprit ni l'ordonnance.*

J'ai pu, en effet, en conservant l'ordre exact des propositions de ce petit Mémoire, rédiger un Volume tout à fait élémentaire à l'usage du premier cycle (1), en me contentant de le dépouiller de sa forme abstraite et de substituer, aux démonstrations trop délicates, des vérifications expérimentales au moyen des instruments ordinaires du dessin. La comparaison des premiers Chapitres de ce Volume avec le présent travail montrera les ressources de cette nouvelle Géométrie.

Elle descend plus bas et monte plus haut que celle qui a cours. Présentée sous une forme expérimentale aux enfants, elle leur est plus accessible et est plus attrayante. Présentée avec tous ses détails, sous une forme abstraite, dans les classes élevées, elle initiera nos jeunes élèves aux méthodes fécondes de Sophus Lie qui ont droit de cité dans notre enseignement.

J'ai volontairement donné à l'exposé qui suit une forme abstraite, en employant la notation symbolique habituelle des groupes de transformation. On peut évidemment se passer de cette notation, mais les démons-

(1) *Cours abrégé de Géométrie,* chez Hachette et Cie; 1906.

trations seraient moins rapides et peut-être moins claires. D'autre part, pour montrer la rigueur et la généralité du raisonnement, je n'ai fait intentionnellement aucune figure. Le lecteur pourra aisément en construire, s'il le juge utile. J'ai également réduit cet exposé au strict *minimum*, en élagnant les applications nombreuses dont il faudrait l'illustrer dans un cours de lycée. Il ne suppose d'ailleurs que la notion préalable du point, de la droite, du plan et de leur détermination ; en d'autres termes, les préliminaires ordinaires qui servent d'introduction à toute Géométrie élémentaire.

Pour plus de rapidité, j'ai rédigé à la fois la théorie dans le plan et dans l'espace. Rien n'est plus facile que de séparer la Géométrie plane de celle de l'espace si on le désire ; mais on détruit ainsi la parfaite harmonie des parties II, III et IV, où l'on remarquera certainement l'exacte correspondance de l'ordre des propositions dans les trois parties.

I. — TRANSLATIONS RECTILIGNES.

1. Le *déplacement* d'une figure invariable peut être envisagé de deux *manières différentes* : *soit simplement* au point de vue du résultat produit, soit dans son ensemble. Dans le premier cas on n'envisage que les deux positions initiale et finale de la figure mobile, sans se préoccuper des positions intermédiaires ; dans le second cas on envisage, en outre, l'ensemble des positions intermédiaires de la figure, c'est-à-dire les trajectoires de ses divers points.

En nous plaçant successivement à ces deux points de vue, nous dirons que :

1° *Deux déplacements sont* ÉQUIVALENTS *s'ils transportent une même figure mobile, partant de la même position initiale, à la même position finale.*

2° *Deux déplacements sont* ÉGAUX *s'ils sont équivalents et si en outre les trajectoires décrites par un point mobile quelconque, dans les deux déplacements, sont identiques.*

2. DÉFINITION. — *Soient* P *un plan fixe dit* plan de glissement *et* D *une droite fixe de ce plan que nous appellerons* glissière fixe *Considérons, d'autre part, un plan* p *et une droite* d *de ce plan, dite* glissière mobile. *Si nous plaçons le plan* p *sur le plan* P *de façon que la droite* d *coïncide avec la droite* D, *nous pourrons faire glisser le plan* p *sur le plan* P *de sorte que* d *glisse sur* D. *Nous réaliserons ainsi un* MOUVEMENT DE TRANSLATION RECTILIGNE *de plan de glissement* P *et de glissière* D.

Tout point m de l'espace supposé lié invariablement au plan mobile p sera entraîné avec ce plan et subira ainsi un déplacement, et il en sera de même, d'une manière plus générale, de toute figure invariable f (plane ou non) liée invariablement au plan p.

Soient alors M_1 et F_1 les positions initiales d'un point m et d'une figure f; et soient M_2 et F_2 leurs positions finales lorsqu'on leur a fait subir une certaine translation rectiligne T. Nous dirons que M_2 *se déduit de* M_1 et que la figure F_2 *se déduit de* F_1 *par la translation rectiligne* T. Les points M_2 et M_1, ainsi que les figures F_2 et F_1, seront dits *homologues* dans la translation rectiligne T.

Dans la suite, comme il s'agira toujours de translations *rectilignes*, nous nous contenterons, pour abréger le langage, de dire simplement *une translation*, en sous-entendant l'épithète *rectiligne*.

3. Translations égales. — D'après ce qui précède, deux translations T et T' seront dites *égales*, et l'on écrira

$$T = T',$$

si, non seulement les positions finales, mais encore les trajectoires décrites par tout point mobile, partant de la même position initiale, sont identiques dans les deux translations.

4. Translations inverses. — Soit T une translation qui amène une figure mobile f de F_1 en F_2. La translation de même glissière et de même plan de glissement, qui ramène f de F_2 en F_1 en faisant décrire à tous les points de la figure mobile f les mêmes chemins que la translation T, mais en sens inverse, est ce que nous appellerons la *translation inverse* de la translation T et nous la désignerons par la notation T^{-1}.

5. Translation identique. — Un mouvement de translation rectiligne est manifestement un mouvement à *un paramètre*, car la position du plan mobile p, et par suite de tout point lié invariablement à ce plan, dépend d'un seul paramètre, par exemple l'abscisse d'un point de la glissière mobile d sur la glissière fixe D. Dès que la valeur de ce paramètre est donnée les positions de tous les points mobiles sont bien déterminées ; ce qui revient à dire que, si l'on fixe la position d'*un seul* point lié invariablement au plan p, celles de tous les autres points entraînés avec p sont bien déterminées.

En d'autres termes, si dans une translation rectiligne un seul point reste fixe, a un déplacement nul, tous les autres points mobiles restent fixes, c'est-à-dire ont des déplacements nuls.

Une translation de ce genre qui ne déplace aucun point est ce qu'on appelle une TRANSLATION IDENTIQUE.

Il N'y a évidemment qu'*une* translation identique, car deux translations identiques sont *égales,* conformément à la définition du n° 3.

Ce qui précède prouve que :

Pour qu'une translation soit identique il faut et il suffit qu'elle laisse UN *point fixe, c'est-à-dire que la trajectoire d'*UN SEUL *point soit nulle.*

On représente la translation identique par le symbole 1.

Il est clair que la translation identique est égale à son inverse.

6. PRODUIT DE DEUX TRANSLATIONS. — Supposons qu'une première translation T fasse passer une figure mobile f de la position F_1 à la position F_2 ; puis qu'une seconde translation T′ transporte f de F_2 en F_3. La figure invariable f aura subi un *déplacement total* de F_1 en F_3 qu'on appelle le *produit* des deux translations T et T′.

7. POSTULAT. — *Il existe une translation rectiligne et une seule équivalente au produit de deux translations rectilignes et indépendante de l'ordre des facteurs.*

En d'autres termes, *nous admettrons* que, si une translation T amène une figure f de F_1 en F_2 et si une seconde translation T′ transporte f de F_2 en F_3, il existe une translation rectiligne et *une seule* qui transporte f de F_1 en F_3.

Nous désignerons *cette translation rectiligne* par le symbole TT′.

De plus, si l'on effectue d'abord la translation T′, elle transportera f de F_1 en une certaine position F'_2, puis la translation T ramènera précisément f de F'_2 en F_3.

Les deux translations rectilignes TT′ et T′T sont *égales* (au sens précis du n° 3), ce qui s'écrira

$$TT' = T'T.$$

Voici le postulat qui, dans cette nouvelle Géométrie, remplace l'ancien postulat d'Euclide. Ceci revient donc à dire que l'on admet que les translations rectilignes forment *un groupe* et, puisque ce postulat est le seul dont nous aurons besoin dans la suite, on en doit conclure qu'il caractérise la Géométrie euclidienne lorsqu'on se place au point de vue de Sophus Lie (¹).

8. Produit de plusieurs translations. — La définition du produit de deux translations, grâce au postulat qui précède, s'étend immédiatement, de proche en proche, à un nombre quelconque de facteurs. Les produits de translations ainsi définis jouissent des mêmes propriétés commutatives et associatives que les produits de nombres.

En particulier, le produit de m fois la même translation T sera nommé la *puissance* $m^{ième}$ de T et sera représenté par le symbole T^m.

(¹) Mon collègue et ami M. Tresse m'a communiqué que les travaux de Lie ont établi que le groupe des mouvements euclidiens est le seul qui contienne un sous-groupe *distingué* et que ce sous-groupe est celui des translations.

Les deux propositions suivantes sont d'ailleurs évidentes :

Le produit d'une translation par la translation identique est égal à cette première translation.

Car la translation $T1$ est celle obtenue en effectuant d'abord la translation T, puis la translation 1 ; or, cette dernière ne change la position d'aucun point, donc

$$T1 = 1T = T.$$

Le produit de deux translations inverses est égal à la translation identique.

Car si, sur une figure f, on effectue successivement les deux translations T et T^{-1}, d'après la définition même de T^{-1}, on la ramène à sa position initiale. On a donc

$$TT^{-1} = 1.$$

Ceci montre que -1, dans T^{-1}, se comporte comme un véritable exposant négatif.

9. Théorème. — *Il n'y a qu'une seule translation qui amène un point donné* A *en un autre point donné* A'.

Soient en effet T et T' deux translations qui amènent A en A'.

La translation $T'T^{-1}$ laisse A fixe, car T' amène A en A' et T^{-1} ramène A' en A. On en conclut que

$$T'T^{-1} = 1,$$

car (n° 5) la seule translation qui laisse un point fixe est la translation identique. On en déduit, en multipliant par T,

$$T'T^{-1}T = 1T$$

ou, comme l'on a

$$T^{-1}T = 1,$$

et que l'on peut remplacer $T^{-1}T$ par le produit effectué,

$$T' = T.$$

10. Théorème. — *Dans toute translation rectiligne :*

1° *La trajectoire d'un point mobile est un segment de droite et cette droite est une glissière ;*

2° *Tout plan passant par une glissière est un plan de glissement.*

Soient M et M′ les positions initiale et finale d'un point mobile *m* dans une translation rectiligne T, et P un plan quelconque passant par la droite MM′.

La translation T′ de glissière MM′ et de plan de glissement P qui amène M en M′ est, d'après le théorème précédent, *égale* à T.

Or, dans cette translation T′, le point *m* a pour trajectoire MM′, la droite MM′ est une glissière et P un plan de glissement, il en est donc de même pour T.

Inversement, *toute glissière est évidemment la trajectoire commune de tous les points mobiles situés sur elle.*

On en conclut qu'*il n'y a pas d'autres glissières que les trajectoires des points mobiles, et que, par suite, par tout point de l'espace il passe une glissière, et une seule, qui est la trajectoire de ce point.*

On peut prendre, comme glissière d'une translation, toute droite joignant deux points homologues dans la translation, et pour plan de glissement tout plan passant par deux tels points.

Il en résulte qu'une translation est parfaitement définie dès qu'on se donne UN *couple de points homologues* A *et* A'.

Car elle aura pour plan de glissement un plan quelconque P passant par AA' et pour glissière la droite AA'. C'est donc la translation obtenue en faisant glisser un plan mobile p sur P, de façon qu'une droite d de p glisse sur AA', et qu'un point a de p décrive le segment AA', ce qui *détermine* le déplacement de p.

II. — DROITES PARALLÈLES.

11. Définition. — *Deux droites de l'espace sont dites* parallèles *lorsque l'une se déduit de l'autre par une translation rectiligne.*

12. Théorème. — *Deux droites parallèles* D *et* D' *qui ont un point commun* A *coïncident.*

Soient en effet T la translation par laquelle D' se déduit de D, et A' l'homologue de A dans cette translation.

1° Si A' coïncide avec A, la translation T est égale à 1; tout point coïncide avec son homologue, donc D' coïncide avec D.

2° Si A' et A sont distincts, A' est situé sur D' homologue de D. Or, par hypothèse, A est aussi situé sur D'. La droite D' coïncide donc avec la glissière AA' : c'est une glissière de T et elle coïncide avec son homologue D.

13. Théorème. — *Deux droites parallèles distinctes* D *et* D′ *sont situées dans un même plan et ne se rencontrent pas.*

D'abord il est évident que les deux droites n'ont aucun point commun, car, sans cela, d'après ce qui précède, elles ne seraient pas distinctes.

Soient alors A un point de D et A′ son homologue sur D′ dans la translation T qui amène D en D′. Désignons par P le plan déterminé par le point A′ et D.

La droite AA′ étant une glissière, le plan P qui la contient est un plan de glissement; par suite, dans la translation T, la droite D reste située dans le plan P, qui contient donc D′.

14. Théorème. — *Deux droites* D *et* D′ *parallèles à une troisième* D″ *sont parallèles entre elles.*

Soit T la translation qui amène D en D″ et T′ la la translation qui amène D″ en D′; la translation TT′ amène D en D′.

15. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener une parallèle à une droite donnée* D, *et l'on ne peut en mener qu'une.*

En effet, soit A un point de D. La translation de glissière AO, qui amène A en O, amène D en la parallèle D′ passant par O.

Cette parallèle est d'ailleurs la seule, car toute parallèle à D passant par O est aussi parallèle à D′ et, par suite, coïncide avec D′ puisqu'elle la rencontre en O.

16. Théorème. — *Dans une translation rectiligne toutes les glissières sont parallèles entre elles.*

Soient D et D_1 deux glissières d'une translation T, A et A′ deux points de D homologues dans cette translation, et B un point de D_1. Désignons par T′ la translation de glissière A′B, qui amène A′ en B et amène D en une position D′, parallèle à D passant par B.

La translation TT′ amène A en B, car T amène A en A′ et T′ transporte A′ en B; TT′ transporte donc aussi D en D′.

Nous allons prouver que D′ coïncide avec D_1.

Exécutons, en effet, les translations précédentes en ordre inverse. La translation T′amène A en un point C de D′; puis la translation T amène C en B, car comme, d'après le postulat,

$$TT' = T'T,$$

la translation T′T doit amener A au même point B que TT′. Or, C et B sont tous deux sur D′ et, comme ce sont deux points homologues dans la translation T, on en conclut que CB, c'est-à-dire D′, est une glissière de T. D′ coïncide donc avec D_1 puisque (n° 10) par un point B il ne passe qu'une glissière.

17. Réciproque. — *Lorsque plusieurs droites sont parallèles, dans toute translation pour laquelle l'une d'elles est glissière, les autres le sont aussi.*

Soient D et D′ deux droites parallèles et T une translation de glissière D. La glissière D_1 de T qui passe par un point O de D′ est parallèle à D, donc elle coïncide avec D′.

18. Segments égaux et parallèles. — Considérons deux droites parallèles indéfinies D et D′ et, sur ces deux droites, deux segments égaux AB et A′B′.

Par une translation amenons A en A′ : les deux droites D et D′ coïncideront. Si B vient se placer sur D′ du même côté de A′ que B′, les deux segments égaux AB et A′B′ coïncident : nous dirons alors qu'ils sont *de même sens*. Sinon, nous dirons que les deux segments sont *de sens contraires*. En d'autres termes :

Deux segments égaux sont parallèles et de même sens si l'on peut les faire coïncider par la translation qui amène leurs origines en coïncidence.

Deux segments égaux sont parallèles et de sens contraires si la translation qui fait coïncider leurs origines les place en prolongement l'un de l'autre.

19. Théorème. — *Dans une translation rectiligne tous les points mobiles décrivent des segments égaux, parallèles et de même sens.*

Soient a et m deux points mobiles dans une translation T, A et M leurs positions initiales, A′ et M′ leurs positions finales. Les trajectoires de ces deux points sont AA′ et MM′.

Les droites AA′ et MM′ sont parallèles comme étant des glissières.

Les droites AM et A′M′ sont également parallèles comme homologues dans la translation T.

Si donc on prend AM pour glissière, A′M′ le sera aussi, et la translation T′, qui transporte A en M, transportera A′ en un certain point de A′M′. D'autre part, cette translation amène la droite indéfinie AA′ en coïncidence avec la droite indéfinie parallèle MM′; par suite, elle amène aussi A′ sur MM′. La translation T′, amenant à la fois A′ sur A′M′ et sur MM′, transporte A′ en M′; elle fait donc coïncider les deux segments AA′ et MM′ qui, par suite, sont égaux, parallèles et de même sens.

20. Remarque. — Si l'on nomme *parallélogramme* un quadrilatère dans lequel les côtés opposés sont deux à deux parallèles, la démonstration précédente prouve que :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux.

Car elle prouve que, dans le quadrilatère $AA'M'M$ qui, par hypothèse, est un parallélogramme, on a

$$AA' = MM'.$$

21. Théorème. — *Étant données quatre droites parallèles* D_1, D_2, D_3, D_4 *situées dans un même plan et coupées par deux sécantes* Δ *et* Δ' *respectivement aux points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* B_1, B_2, B_3, B_4, *si l'on a*

$$A_1A_2 = A_3A_4,$$

on a aussi

$$B_1B_2 = B_3B_4.$$

Supposons que les segments A_1A_2 et A_3A_4 soient de même sens. Effectuons alors sur l'ensemble des deux droites D_1 et D_2, considérées comme formant une figure invariable, une translation de glissière Δ qui amène A_1 en A_3; le point A_2 viendra en A_4, et D_1 et D_2 viendront respectivement coïncider avec D_3 et D_4. Les points B_1 et B_2 viendront se placer en B'_1 et B'_2 sur D_3 et D_4, de telle sorte que le segment $B'_1B'_2$ soit parallèle à Δ' et égal à B_1B_2. La figure $B'_1B'_2B_4B_3$ est alors un parallélogramme, et l'on a

$$B_1B_2 = B'_1B'_2 = B_3B_4.$$

De plus, les deux segments B_1B_2 et B_3B_4 sont de même sens.

22. Corollaire. — *Si dans la figure précédente on a*

$$A_3 A_4 = n . A_1 A_2,$$

n étant un nombre entier quelconque, on a aussi

$$B_3 B_4 = n . B_1 B_2.$$

23. Théorème. — *Lorsque deux droites* D *et* D′ *sont parallèles, toute droite* Δ *de leur plan qui rencontre l'une rencontre l'autre.*

Remarquons d'abord que, D et D′ ne se rencontrant pas, tous les points de l'une sont situés d'un même côté de l'autre.

Supposons alors que Δ coupe D en A. Le théorème sera évidemment démontré si l'on peut prouver qu'il existe un point de Δ situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D.

A cet effet, prenons un point B sur D et un point B′ sur D′, et traçons le segment de droite BB′. Faisons effectuer à D une translation de glissière Δ du côté de D′. Le point A viendra occuper une position A_1 sur Δ, du même côté de D que D′, et D viendra en une position D_1, parallèle à D, et passant par A_1.

Si A_1 est situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D, la proposition est établie.

Sinon, le point A_1 étant situé entre D et D′, il en sera de même de tous les points de D_1 ; et les deux points B et B′, étant de part et d'autre de D_1, la droite D_1 rencontrera BB′ en un point B_1 situé entre B et B′.

Choisissons alors un nombre entier n, tel que $n.BB_1$ soit égal ou supérieur à BB′, et effectuons sur la droite D la translation T^n.

Le point A viendra en un point A_n de Δ, du même côté de D que D′ et tel que

$$AA_n \doteq n.A'A_1.$$

Ce point A_n sera situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D ; car, s'il n'en était pas ainsi, la parallèle D_n à D passant par A_n serait comprise entre D et D′. Elle couperait BB′ en un point B_n compris entre B et B′ et, par suite, tel que

$$BB_n < BB'.$$

Or ceci est impossible, car, puisque

$$AA_n = n.AA_1,$$

on a aussi

$$BB_n = n.BB_1 \geqq BB'.$$

24. Théorème. — *Deux droites* D *et* D′ *situées dans un même plan et ne se rencontrant pas sont parallèles.*

Menons en effet par un point O de D′ une parallèle Δ à D. Elle coïncidera avec D′, car, s'il n'en était pas ainsi, D′, rencontrant Δ, rencontrerait D parallèle à Δ.

III. — PLANS PARALLELES.

25. Définition. — *Deux plans sont dits* parallèles *lorsque l'un se déduit de l'autre par une translation rectiligne.*

26. Théorème. — *Deux plans parallèles* P *et* P′ *qui ont un point commun* A *coïncident.*

Soient en effet T la translation par laquelle P′ se déduit de P et A′ l'homologue de A dans cette translation :

1° Si A' coïncide avec A, la translation T est égale à 1 et les deux plans coïncident.

2° Si A' et A sont distincts, la droite AA' est une glissière située tout entière dans le plan P' qui contient à la fois A et A'. Le plan P' est donc un plan de glissement et coïncide avec son homologue P.

27. Théorème. — *Deux plans parallèles distincts n'ont aucun point commun.*

Car, s'ils en avaient un, ils coïncideraient.

28. Théoreme. — *Deux plans* P *et* P' *parallèles à un troisième* P'' *sont parallèles entre eux.*

Car, si T est la translation qui transporte P en P'' et T' celle qui transporte P'' en P', la translation TT' transporte P en P'.

29. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener un plan parallèle à un plan donné* P *et un seul.*

On obtient évidemment un tel plan P' par une translation qui amène un point de P en O. C'est d'ailleurs le seul, car tout autre plan parallèle à P et passant par O est aussi parallèle à P' et par suite coïncide avec lui puisqu'il le rencontre en O.

30. Théorème. — *Les droites d'intersection* D *et* D' *de deux plans parallèles* P *et* P', *par un troisième* Π *qui les rencontre, sont parallèles.*

Soient O un point de D et O' un point de D'. Si l'on fait effectuer à P la translation de glissière OO' qui amène O en O', le plan Π, contenant OO', sera un plan de glissement, la droite D restera donc dans Π et, comme P viendra coïncider avec P', la droite D viendra bien par cette translation coïncider avec l'intersection D' de Π et P'.

31. Théorème. — *Étant donnés quatre plans parallèles* P_1, P_2, P_3, P_4 *rencontrés par deux sécantes* Δ *et* Δ' *respectivement aux points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* B_1, B_2, B_3, B_4, *si l'on a*

$$A_1A_2 = A_3A_4,$$

on a aussi

$$B_1B_2 = B_3B_4.$$

Supposons les segments A_1A_2 et A_3A_4 de même sens. Effectuons sur l'ensemble des deux plans P_1 et P_2, considérés comme formant une figure invariable, la translation de glissière Δ qui amène A_1 en A_3 : le point A_2 viendra en A_4, et P_1 et P_2 viendront respectivement coïncider avec P_3 et P_4. Les points B_1 et B_2 viendront se placer en B'_1 et B'_2 sur les plans P_3 et P_4, de telle sorte que le segment $B'_1B'_2$ soit parallèle à Δ' et égal à B_1B_2.

Les droites B'_1B_3 et B'_2B_4 seront parallèles comme intersections des plans P_3 et P_4 par le plan des deux parallèles $B'_1B'_2$ et Δ'.

La figure $B'_1B'_2B_4B_3$ est donc un parallélogramme et l'on a

$$B_1B_2 = B'_1B'_2 = B_3B_4.$$

Corollaire. — *Si l'on a*

$$A_3A_4 = n.A_1A_2,$$

n étant un nombre entier quelconque, on a aussi

$$B_3B_4 = n.B_1B_2.$$

32. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *sont parallèles, toute droite* Δ *qui rencontre l'un rencontre l'autre.*

La démonstration est identique à celle du n° 23.

On pourrait d'ailleurs, par un renversement de l'ordre des propositions, placer celle-ci la première et alors en déduire le théorème du n° 23.

33. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *sont parallèles, tout plan* Π *qui rencontre l'un rencontre l'autre.*

Supposons que Π coupe le plan P suivant une droite D. Si par un point O de D on mène, dans le plan Π, une droite Δ distincte de D, cette droite rencontrant le plan P en O rencontrera le plan parallèle P′ en un point O′ appartenant à la fois à P′ et à Π.

34. Théorème. — *Deux plans* P *et* P′ *qui n'ont aucun point commun sont parallèles.*

Menons en effet par un point O de P′ un plan Π parallèle à P. Ce plan Π coïncide avec P′, car, s'il n'en était pas ainsi, P′, rencontrant Π, rencontrerait le plan P parallèle à Π.

IV. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES.

35. Définition. — *Une droite* D *et un plan* P *sont dits* parallèles *s'il existe une translation qui amène* D *à être contenue dans le plan* P *ou, ce qui revient au même, s'il existe une translation qui amène* P *à contenir* D.

36. Théorème. — *Si une droite* D *parallèle à un plan* P *a un point* A *commun avec ce plan, elle est située tout entière dans le plan* P.

Soit T la translation qui amène P à occuper une position P′ passant par D et soit A′ l'homologue de A dans cette translation. Il suffit de prouver que P′ coïncide avec P.

1° Si A′ coïncide avec A, c'est évident, puisque T = 1.

2° Si A′ ne coïncide pas avec A, la droite AA′ est tout entière dans le plan P′, car A est situé sur D contenue dans P′ et A′ est l'homologue d'un point de P. AA′ étant une glissière, le plan P′ est un plan de glissement et coïncide avec son homologue P.

37. Théorème. — *Une droite* D *parallèle à un plan* P *et non située dans ce plan n'a aucun point commun avec ce plan.*

Car, si elle en avait un, elle serait tout entière dans le plan.

38. Théorème. — *Lorsque deux droites* D *et* D′ *sont parallèles, tout plan* P *parallèle à l'une* D *est parallèle à l'autre* D′.

Car, si T est la translation qui amène D′ à coïncider avec D et T′ celle qui amène D à être contenue dans P, la translation TT′ amène la droite D′ à être située dans le plan P.

Cas particulier. — *Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan passant par l'une est parallèle à l'autre,* ou, ce qui revient au même : *Lorsqu'une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.*

39. Corollaire. — *Si par un point* O *d'un plan* P *on mène une droite* D′ *parallèle à une autre droite* D *parallèle au plan* P, *la droite* D′ *est tout entière située dans le plan* P.

Car D′ est également parallèle au plan P et a un point O commun avec lui.

40. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *se coupent, toute droite* D *parallèle à la fois aux deux plans est parallèle à leur intersection; et réciproquement, toute droite* D *parallèle à l'intersection est à la fois parallèle aux deux plans.*

Si D est parallèle à P et à P′ et que par un point O de leur intersection on mène une parallèle Δ à D, cette droite Δ est située à la fois dans les deux plans (n° 39); donc elle coïncide avec leur intersection.

La réciproque résulte immédiatement du cas particulier du n° 38.

41. Théorème. — *Si une droite* D *est parallèle à un plan* P, *tout plan* Π, *passant par* D, *qui coupe* P, *le coupe suivant une droite* D′ *parallèle à* D.

Car D est à la fois parallèle à P et à Π; donc elle est parallèle à leur intersection D′.

42. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *sont parallèles, toute droite* D *parallèle à* P *est parallèle à* P′.

Car, si T est la translation qui amène P′ à coïncider avec P et T′ celle qui amène P à passer par D, la translation TT′ amène P′ à passer par D.

Cas particulier. — *Lorsque deux plans sont pa-*

rallèles, toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

43. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan donné* P. *Le lieu géométrique de ces droites est le plan* P′ *parallèle à* P *passant par* O.

Car toute droite passant par O et située dans P′ est, d'après ce qui précède, parallèle à P; et, réciproquement, toute droite parallèle à P passant par O est également parallèle à P′ et, par suite, est située dans P′ puisqu'elle y a un point O.

44. Théorème. — *Toute droite* D *qui ne rencontre pas un plan* P *est parallèle à ce plan.*

Soit en effet P′ un plan parallèle à P et passant par un point O de D. La droite D est située dans le plan P′, car, s'il n'en était pas ainsi, la droite D, rencontrant P′ en O, rencontrerait le plan parallèle P.