Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 474-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__474_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2031.

(1905, p. 576.)

Démontrer la relation

$$\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)} + \sum \frac{1}{f(\alpha)} = 0.$$

La première somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0$$

et la seconde somme à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0;$$

$f'(x)$ et $f''(x)$ désignent les dérivées première et seconde du polynome $f(x)$. R. BRICARD.

PREMIÈRE SOLUTION

Par M. PARROD.

Soit

$$f'(x) = \prod (x - \alpha);$$

on a

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \sum \frac{1}{x - \varphi};$$

par suite,

$$\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)} = \sum \sum \frac{1}{f'(a)(a - \alpha)}.$$

D'autre part

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{1}{f'(a)(x-a)};$$

donc

$$-\sum \frac{1}{f(\alpha)} = \sum \sum \frac{1}{f'(a)(a-\alpha)}.$$

Les deux sommes doubles étant égales, la relation est établie.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. Nicolas Kryloff.

La question se résout élégamment à l'aide du théorème suivant (*Cours de Hermite*, 4e éd., p. 172) de Cauchy. Si $F(z)$ est finie, continue et uniforme à l'intérieur du contour S, l'intégrale

$$\int_S \frac{F(z)\,g'(z)\,dz}{g(z)}$$

est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des valeurs de $F(z)$, qui correspondent aux racines de $g(z) = 0$, comprises à l'intérieur du contour S, en tenant compte de leur multiplicité.

Or, en supposant, en premier lieu,

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \qquad \text{et} \qquad g(z) = f'(z);$$

nous voyons que $2i\pi \sum \frac{1}{f(\alpha)}$ est égal à

$$\int_S \frac{f''(z)\,dz}{f(z)f'(z)};$$

de l'autre côté $\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)}$ est égal, en prenant

$$F(z) = \frac{f''(z)}{f'^2(z)} \qquad \text{et} \qquad g(z) = f(z),$$

à l'intégrale

$$\int_S \frac{f''(z)f'(z)\,dz}{f'^2(z)f(z)} = \int_S \frac{f''(z)\,dz}{f'(z)f(z)},$$

c'est-à-dire que la somme totale est égale au produit de $2i\pi$ par

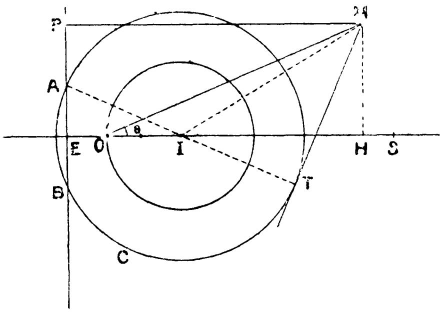
$$\int_{(SS_1)} \frac{f''(z)\,dz}{f'(z)f(z)},$$

lequel est bien égal à o, comme étant égal à moins l'intégrale curviligne d'une fonction, holomorphe évidemment à l'extérieur des courbes SS_1, et par suite égal à zéro.

Autres solutions de MM. LETIERCE et SICARD.

2032.

On considère une cardioïde dont le sommet est S, *dont le point de rebroussement est* O *et dont les points de con-*



tact de la tangente perpendiculaire à OS *sont* A *et* B. *On prend le point* I *situé entre* O *et* S *et tel que* $OI = \frac{OS}{4}$. *On décrit le cercle* C *de centre* I *et de rayon* IA.

Soient T *le point de contact d'une des tangentes au cercle* C, *issues d'un point quelconque* M *de la cardioïde, et* P *la projection de* M *sur la droite* AB. *Démontrer que, quel que soit* M, *on a*

$$8\,\overline{MT}^4 = \overline{OS}^3 \times MP,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{MT}^4}{MP} = \text{const.}$$

(E.-N. BARISIEN).

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Posons

$$OS = 2O;$$

le point I est le centre du cercle générateur de la cardioïde considérée comme une conchoïde de cercle; on trouve aisément que la droite AB coupe OS en E tel que $OE = \frac{a}{4}\cdot$ Joignons IM, IT, posons $\widehat{SOM} = \theta$; nous avons

$$\overline{MT}^2 = \overline{IM}^2 - \overline{IT}^2. \tag{1}$$

Or, dans le triangle OIM, on a

$$\overline{IM}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2(1 + \cos\theta)^2 - a^2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$$

ou

$$\overline{IM}^2 = \frac{a^2}{4}(5 + 4\cos\theta).$$

D'un autre côté

$$\overline{IT}^2 = \overline{IA}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right)^2\cdot$$

Mais on trouve aisément que la tangente double AB a son point de contact A tel que $EA = \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot$ Dès lors

$$\overline{IT}^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} = \frac{3a^2}{4}\cdot$$

Remplaçant $\overline{IM}^2$ et $\overline{IT}^2$ par leurs valeurs dans (1), on obtient

$$\overline{MT}^2 = \frac{a^2}{4}(5 + 4\cos\theta) - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}(1 + 2\cos\theta);$$

MH étant la perpendiculaire abaissée de M sur OS, nous avons

$$MP = HE = a(1 + 4\cos\theta)\cos\theta + \frac{a}{4},$$

$$MP = \frac{a}{4}(1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta) = \frac{a}{4}(1 + 2\cos\theta)^2.$$

En comparant les valeurs de $\overline{MT}^2$ et MP on en déduit

$$\frac{\overline{MT}^4}{MP} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{a}{4}} = a^3$$

et comme $a = \frac{OS}{2}$, il vient finalement

$$\frac{\overline{MT}^4}{MP} = \frac{\overline{OS}^3}{8} = \text{const.}$$

Autres solutions par MM. Letierce, Lez, Valère Maës, Retali, J. Rose.

2034.

(1906, p. 48.)

Soit dans un cercle une corde AF *perpendiculaire au diamètre* BC. *On prend une parabole de foyer* F *tangente aux côtés du triangle* ABC *et un cercle de centre* A *tangent à* BC; *en dehors de* BC, *les tangentes communes à ce cercle et à cette parabole forment un triangle équilatéral.* MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. Parrod.

La corde AF rencontre BC en un point H qui est le point de contact du cercle; soient E et G les points où deux tangentes communes rencontrent la droite BC; il suffit de montrer que l'angle M qu'elles forment est égal à 60°.

Le quadrilatère FEMG est inscriptible; donc

$$\widehat{M} + \widehat{EAG} = 180°,$$

ou

$$\widehat{M} + 90° + \frac{M}{2} = 180°.$$

Donc

$$\widehat{M} = 60^\circ.$$

Autres solutions de MM. Gisolf, Barisien et Laureaux.

2037.

(1906, p. 96.)

Soit ABCD *un tétraèdre orthocentrique dont l'orthocentre est* H. *Si un point* M *est tel que ses projections sur les plans des quatre faces du tétraèdre soient dans un même plan, ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de* 1 *à* 2. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

La proposition à démontrer est analogue à la suivante : *La droite de Simson d'un point* M *du cercle circonscrit à un triangle d'orthocentre passe* H *par le milieu de la droite* MH.

On peut la démontrer par des considérations analogues.

Si l'on considère un tétraèdre orthocentrique ABCD, le lieu des points M tels que les projections de ce point sur les faces du tétraèdre soient dans un même plan n'est autre que le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits dans le tetraèdre, les plans précédents étant les plans tangents au sommet de ces paraboloïdes.

Or on sait que le plan orthoptique d'un paraboloïde inscrit à un tétraèdre orthocentrique passe par l'orthocentre de ce tétraèdre (*voir*, par exemple, Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 118), ce qui démontre la proposition.