NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur un théorème de Weierstrass

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 454-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__454_1>

[D4b]

SUR UN THÉORÈME DE WEIERSTRASS;

PAR M. H. LAURENT.

Considérons une fonction $f(z)$ synectique dans toute l'étendue du plan, soient $a_1 a_2 \ldots a_k$ ses zéros de module ρ, $b_1 b_2 \ldots b_1$ ses zéros de module ρ', etc., et supposons $f(0)$ différent de zéro et

$$r_1 < \rho < r_2 < \rho' < r_3 < \ldots.$$

Considérons la somme

$$\begin{aligned}2\pi s\sqrt{-1} = &\int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z-x} + \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \int_{r_4} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

l'indice r_k placé au bas d'une intégrale indiquant qu'elle doit être prise le long d'une circonférence de rayon r_k décrit de l'origine comme centre.

Si l'on remplace les différences successives par leurs valeurs, on trouve dans l'une d'elles ou dans la première intégrale l'expression $2\pi\sqrt{-1}\frac{f'(x)}{f(x)}$, puis des expressions de la forme

$$\frac{x^h}{a^h} \frac{1}{a-x} 2\pi\sqrt{-1}$$

[qui devront être répétées α fois si a est racine d'ordre α de $f(x) = 0$]. On a donc

$$(1) \qquad s = \frac{f'(x)}{f(x)} + \sum \frac{x}{a} \frac{1}{a-x} + \sum \frac{x^2}{b^2} \frac{1}{b-x} + \sum \frac{x^3}{c^3} \frac{1}{c-x} + \dots$$

d'un autre côté, s d'après cette formule est une fonction synectique $\varphi(x)$ de x, et l'on peut la développer par la formule de Maclaurin, car on a

$$2\pi\sqrt{-1}\,\frac{d^n s}{dx^n} = n! \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{(z-x)^{n+1}} + \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \left[n \frac{x}{z} \frac{1}{(z-x)^{n+1}} + \dots \right] dz + \dots,$$

et pour $x = 0$

$$\frac{1}{x!}\left(\frac{d^n s}{dx^n}\right)_{x=0} = \frac{d^n}{dz^n} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum \frac{1}{a^{n+1}} + \sum \frac{1}{b^{n+2}} + \dots.$$

On en déduit le développement de $\varphi(x)$ par la formule de Maclaurin. La formule (1) ou $s = \varphi(x)$ donne alors en intégrant

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = \log \frac{f(x)}{f(0)} - \sum P_1 \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \sum P_2 \log\left(1 - \frac{x}{b}\right) \dots,$$

P_1, P_2, ... désignant des polynomes du degré 1, 2, ... et, par suite,

$$(2) \quad f(x) = f(0) e^{\int_0^x \varphi(x)\,dx}\, \Pi\, e^{P_1}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \Pi\, e^{P_2}\left(1 - \frac{x}{b}\right) \dots,$$

c'est la formule de Weierstrass, et nous avons une expression de la fonction $\varphi(x)$ qui était restée inconnue jusqu'à présent.

Il est bon d'observer que la méthode précédente ne suppose par les zéros de $f(x)$ simples, on peut les supposer d'un ordre de multiplicité quelconque, même négatif, ce qui veut dire que a, b, c, ... peuvent être des infinis de $f(x)$, dans ce cas les binomes $\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $\left(1-\frac{x}{b}\right)$, ... figureront alors en dénominateurs.