Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1906)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 406-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__406_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

1° Étant donné un triangle ABC ayant pour côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; trouver, dans le plan de ce triangle, le lieu du point M tel que

$$\pm a.\overline{MA}^2 \pm b.\overline{MB}^2 \pm c.\overline{MC}^2 = abc, \tag{1}$$

en prenant toutes les combinaisons de signe possibles.

2° Le lieu correspondant à l'équation

$$b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 - a.\overline{MA}^2 = abc$$

est un cercle S_A. On trouverait de même un cercle S_B et un cercle S_C. On considère tous les triangles ABC inscrits à un cercle donné et circonscrits à un deuxième cercle donné et intérieur au premier : Calculer la somme

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2},$$

ρ_A, ρ_B, ρ_C désignant les rayons des cercles S_A, S_B, S_C.

3° Calculer les puissances des sommets A, B, C et des centres des cer les inscrits et exinscrits au triangle ABC par rapport au cercle S_A. Déterminer les points d'intersection de ce cercle S_A et des côtés du triangle ABC.

4° Si les sommets B, C restant fixes le rapport $\frac{AB}{AC}$ demeure invariable, le cercle S_A est orthogonal à un cercle fixe.

5° On donne le cercle S_A, le cercle exinscrit au triangle ABC et situé dans l'angle A, ainsi que le point de contact de ce cercle et du côté BC. Trouver l'enveloppe de la droite joignant les points de contact de ce cercle exinscrit et des côtés AB, AC.

6° Lieu du point M vérifiant l'une des équations (1) quand ce point n'est plus assujetti à rester dans le plan ABC.

Mathématiques spéciales.

I. On considère la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2+y^2)^2-ax(x^2+y^2)-a^2y^2=0,$$

et l'on demande d'exprimer x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre, de construire la courbe et de trouver les relations qui lient les valeurs de ce paramètre correspondant à quatre points situés, soit sur un cercle ne passant pas par l'origine, soit sur une droite passant par l'origine.

II. Soient M_1 le point où le cercle osculateur en un point M rencontre de nouveau la courbe, M_2 le point où le cercle osculateur en M_1 rencontre de nouveau la courbe, etc.; démontrer que, si quatre points M sont une droite D, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle orthogonal à un cercle fixe, si D varie. Si les points M_1 sont sur une droite D_1, les points M_2 sont sur une droite D_2, et ainsi de suite; trouver la position limite des droites D, D_1, D_2, ...

Si quatre points M sont sur un cercle C, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle C_1 ; démontrer que, s'ils sont sur une droite, il existe deux points fixes P et P′ d'où l'on voit sous un angle droit les segments déterminés sur Ox par les cercles C. Dans le cas général, les points M_2 sont sur un cercle C_2, etc.; quelles conditions doit remplir le cercle C pour que les points M_p soient sur une droite; dans l'hypothèse où tous les points obtenus successivement sont sur des cercles C_1, C_2, ..., trouver vers quelles limites tendent les puissances, par rapport à ces cercles, des points de la courbe située sur Ox; en déduire la limite de ces cercles.

III. Trouver le lieu d'un point A tel que quatre des points de contact des tangentes issues de ce point soient sur un cercle Γ: quel est le nombre des tangentes réelles menées de A?

Démontrer que le cercle Γ est orthogonal à un cercle fixe et trouver le lieu de son centre.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

1° Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque d'une surface S; p et q les paramètres directeurs du plan tangent en ce point, définis par la relation identique

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0; \tag{1}$$

exprimer ces cinq quantités à l'aide de deux paramètres variables α et β, de manière à vérifier, outre la relation (1), les suivantes :

$$z - px - qy = \alpha, \tag{2}$$

$$y = \beta x, \tag{3}$$

$$p + q\beta = u(\alpha, \beta), \tag{4}$$

$u(\alpha, \beta)$ étant une fonction donnée de α et de β.

Si l'on prend α et β comme variables indépendantes, il existe, en général, un système et un seul de cinq fonctions x, y, z, p, q satisfaisant aux conditions précédentes et on l'obtient sans aucun signe de quadrature.

Faire voir que la surface S ainsi obtenue se réduit à une courbe si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$, et dans ce cas seulement.

Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S, dans le système de coordonnées curvilignes α, β. Montrer que les lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont conjuguées sur S. Les développables circonscrites à la surface suivant les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont des cônes. Quel est le lieu des sommets de ces cônes ?

2° Pour que les développables circonscrites à S suivant les lignes $\beta = \text{const.}$ soient également des cônes, il faut et il suffit que la fonction u soit de la forme

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2,$$

où A est une fonction quelconque de α seule ; B, B_1, B_2 trois fonctions quelconques de β seule.

Si l'on choisit de toutes les manières possibles la fonction A (les fonctions B, B_1, B_2 étant, au contraire, prises une fois pour toutes), la surface S ne cesse pas de vérifier une certaine équation linéaire aux dérivées partielles

$$(5) \qquad Pp + Qq = R$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, y, z. Quelles sont les caractéristiques de cette équation ?

Le lieu des sommets des cônes circonscrits suivant les courbes $\beta = \text{const.}$ est le même pour toutes les surfaces intégrales de l'équation (5).

3° Comment doivent être choisies les fonctions B, B_1, B_2 pour que ce lieu soit une droite D (non située dans un même plan avec l'axe des z) ?

Montrer qu'on peut alors, sans diminuer la généralité, ramener les fonctions B_1, B_2 à être des polynomes du premier degré en β.

Comment s'intégrerait l'équation des lignes asymptotiques des surfaces S ainsi obtenues ?

Que trouverait-on en rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D ?

Quelle relation ont-elles avec les surfaces analogues que l'on obtiendrait en faisant jouer à la droite D le rôle de l'axe des z primitifs, et à celui-ci le rôle de la droite D ?

A quelle forme simple pourrait-on ramener l'équation de l'une de ces surfaces par une transformation homographique ?

Mécanique rationnelle.

Un solide de révolution homogène S est mobile autour de son centre de gravité, que l'on suppose fixe dans l'espace. Ce centre de gravité est le sommet commun à deux trièdres : l'un $O\xi\eta\zeta$ fixe dans l'espace, l'autre $Oxyz$ lié au solide, Oz étant dirigé suivant l'axe de révolution.

Un point P, situé sur Oz, à une distance donnée d du point O, est soumis à une force perpendiculaire à l'axe $O\zeta$ et dirigée vers cet axe; la valeur absolue de cette force est égale à $kM\rho$, k étant un coefficient constant, M la masse totale du solide S, ρ la distance du point P à $O\zeta$.

1° Former les équations différentielles qui servent à déterminer en fonction du temps les paramètres fixant la position du trièdre mobile.

2° Si l'on suppose que l'axe du solide S est d'abord placé perpendiculairement à $O\zeta$ et que l'on imprime au solide une rotation initiale autour de Oz ; cette rotation persistera ensuite. Quelle valeur minima peut-on attribuer à la vitesse angulaire de cette rotation pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que, si l'on vient à troubler très peu le mouvement, l'axe Oz reste indéfiniment très voisin du plan $\xi O\eta$?

3° En supposant que l'axe Oz est placé primitivement d'une manière donnée quelconque et que la composante suivant Oz de la rotation initiale est donnée différente de zéro, quelles doivent être les autres conditions initiales du mouvement pour que Oz tende, lorsque le temps croît indéfiniment, vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Dans le cas où ces conditions sont remplies, quelles sont les principales circonstances du mouvement?

4° Étudier le mouvement dans le cas particulier suivant : le solide S est constitué par une tige rigide de masse négligeable, dirigée suivant Oz, et par deux disques circulaires identiques, ayant leurs centres sur Oz et leurs plans perpendiculaires à cet axe, à une distance du point O égale à $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Pour chacun des disques, la masse, représentée par m, est supposée répartie uniformément sur une circonférence de rayon égal à l. Le point P est le centre de l'un des disques et le coefficient k est égal à 2. Les conditions du n° 3° sont remplies et la composante suivant Oz de la vitesse angulaire de la rotation initiale est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trouver le lieu de l'axe Oz du solide.

5° Les conditions du n° 3° étant remplies pour un solide de révolution S quelconque, on imprime à ce solide, à un certain moment, une percussion de grandeur donnée et de direction perpendiculaire au plan $zO\zeta$. Suivant quelle ligne d'action faut-il appliquer cette percussion pour que l'axe Oz, dans le mouvement ultérieur, tende vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Comparer le nouveau déplacement de l'axe Oz avec celui qui aurait eu lieu sans la percussion.

Note. — La position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe sera déterminée par les angles d'Euler, θ, ψ, φ. Si A et C désignent les moments principaux d'inertie par rapport à Ox et Oz; p, q, y, r les composantes de la rotation suivant Ox, Oy, Oz et $2T$ la force vive du solide, on rappelle les formules suivantes :

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$
$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\sin^2\theta\psi'^2 + \theta'^2) + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2.$$