NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL LÉVY

Sur la densité des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 385-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__385_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[19b]

SUR LA DENSITÉ DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS A UNE GRANDEUR DONNÉE;

PAR M. PAUL LÉVY.

Partons de la décomposition en facteurs premiers du produit $n!$ L'exposant d'un facteur premier α dans cette décomposition est

$$\left[\frac{u}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^2}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^3}\right]+\ldots,$$

$[x]$ désignant, d'après une notation de Gauss, la partie entière de x; le dernier terme non nul est le terme de rang $\left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right]\cdot$ On peut donc écrire

$$\text{(1)}\quad \log n! = \sum \log\alpha \left\{ \left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{\alpha^{\left[\frac{\log n}{\log\alpha}\right]}}\right] \right\},$$

α représentant successivement tous les nombres premiers inférieurs à n.

Cherchons une valeur approchée du second membre.

Pour cela, remplaçons le coefficient de $\log\alpha$, que nous désignerons par A, par la valeur plus grande

$$\text{(2)}\qquad \frac{n}{\alpha}+\frac{n}{\alpha^2}+\ldots+\frac{n}{\alpha^{\left[\frac{\log n}{\log\alpha}\right]}}.$$

Les termes de cette somme sont en progression géométrique. Les p premiers ont pour somme

$$s_p = \frac{n}{\alpha}\,\frac{1-\frac{1}{\alpha^p}}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression (2) s'obtient en donnant à p la valeur

$$p' = \left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right];$$

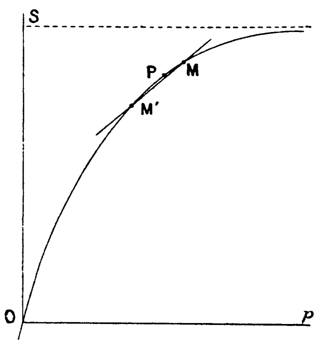
on augmentera une seconde fois A en remplaçant p' par la valeur plus grande

$$p'' = \frac{\log n}{\log \alpha},$$

puisque s_p croît avec p; il vient ainsi

$$A < \frac{n-1}{\alpha - 1}.$$

Cherchons maintenant une limite de l'erreur commise. L'erreur commise dans la première approximation est inférieure au nombre p' des termes. L'erreur



commise dans la seconde est $s_{p''} - s_{p'}$; je dis qu'elle est inférieure à $p'' - p'$. Pour le voir, traçons la courbe représentant la variation de s_p en fonction de p. Figurons sur cette courbe les points M′, P, M d'abscisses croissantes $p'' - 1$, p' $p_{,}''$. On a

$$s_p - s_{p-1} = \frac{n}{\alpha^p},$$

d'où

$$s_{p''} - s_{p''-1} = 1 = p'' - (p'' - 1).$$

Le coefficient angulaire de la droite MM' est donc égal à l'unité. Celui de MP est alors inférieur à l'unité, et

$$s_{p''} - s_{p'} < p'' - p',$$

comme nous l'avons annoncé.

L'erreur commise sur la valeur de A est donc inférieure à

$$p' + (p'' - p') = \frac{\log n}{\log \alpha},$$

et l'on a

$$A < \frac{n-1}{\alpha - 1} < A + \frac{\log n}{\log \alpha},$$

d'où, en tenant compte de l'égalité (1), et en appelant ν le nombre des facteurs premiers distincts de $n!$

$$\log n! < \sum \frac{n-1}{\alpha-1} \log \alpha < \log n! + \nu \log n$$

ou

$$\frac{\log n!}{n-1} < \sum \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} < \frac{\log n!}{n-1} + \frac{\nu \log n}{n-1}. \tag{3}$$

L'on peut de cette inégalité déduire une valeur approchée de la densité des nombres premiers entre 0 et n. Il semble intuitif que l'expression $\sum \frac{\log \alpha}{\alpha - 1}$, dans laquelle α représente successivement tous les nombres premiers inférieurs à n, aura une valeur plus ou moins grande suivant que cette densité sera plus ou moins grande. Cependant, comme les nombres premiers sont en groupements plus denses dans le voisinage de certaines valeurs, il peut y avoir dans la somme surtout des termes de faibles valeurs, ou au contraire plus de termes plus grands, et le nombre des termes n'est pas en rapport bien défini avec la valeur de la somme. Il importe donc de préciser ce raisonnement.

Soit α_1, α_2, ..., α_ν, ... la suite des nombres premiers rangés par ordre de grandeur; considérons, par une sorte d'inversion du problème, ν comme variable, et α_ν comme fonction inconnue. On peut, dans l'inégalité (3), remplacer n par α_ν. Il vient ainsi

$$(4) \qquad \frac{\log \alpha_\nu!}{\alpha_\nu - 1} < \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\log \alpha_i}{\alpha_i - 1} < \frac{\log \alpha_\nu!}{\alpha_\nu - 1} + \frac{\nu \log \alpha_\nu}{\alpha_\nu - 1}.$$

Essayons de voir si une suite β_1, β_2, ..., β_ν, ... de croissance plus rapide que la suite des α, et telle que

$$\beta_\nu > \alpha_\nu,$$

satisfait à cette inégalité. Les β peuvent d'ailleurs n'être pas entiers, on remplace alors $\beta!$ par la fonction eulérienne $\Gamma(1 + \beta)$.

La fonction $\frac{\log \Gamma(x+1)}{x-1}$, qui ne diffère de $\log x$ que d'une grandeur, ne devenant pas infinie avec x, croît avec x, à partir d'une certaine valeur de x, tandis que $\frac{\log x}{x-1}$ décroît. Il s'ensuit que, si l'on remplace les α par les β, sans changer la valeur de ν, les membres extrêmes de l'inégalité (4) augmentent et le second membre diminue. Il pourra alors se faire que la première partie de l'inégalité ne soit plus vérifiée; cela pourrait au contraire avoir lieu pour la seconde si la croissance des β n'était pas assez rapide. On voit ainsi comment l'on saura si une suite arbitrairement formée est de croissance trop rapide ou trop lente.

La série dont le terme général est $\frac{1}{\alpha}$ est divergente. D'autre part, le rapport $\frac{\alpha_\nu}{\nu}$ devient infini avec ν. Ces résultats s'établissent aisément, et nous les supposerons connus. L'idée la plus naturelle est donc de poser, pour le premier essai,

$$\beta_\nu = \nu \log \nu.$$

Introduisons un paramètre λ et posons

$$\beta_\nu = \lambda \nu \log \nu.$$

Proposons-nous de calculer les quantités qui figurent dans l'inégalité (4) avec des erreurs ne devenant pas infinies. On peut alors remplacer $\frac{\log \Gamma(\beta_\nu + 1)}{\beta_\nu - 1}$ par $\log \beta_\nu$ (¹); on peut alors remplacer $\frac{\log \beta_i}{\beta_i - 1}$ par $\frac{\log \beta_i}{\beta_i}$, la différence $\frac{\log \beta_i}{\beta_i(\beta_i - 1)}$ étant le terme général d'une série convergente, puisque $\beta_i > i$; $\sum \frac{\log \beta_i}{\beta_i}$ peut à son tour être remplacé par $\int^\nu \frac{\log \beta_\nu}{\beta_\nu} d\nu$. Le premier membre de l'inégalité (4) devient alors

$$\log \nu + \log \log \nu + \log \lambda;$$

le troisième n'en diffère que d'une quantité finie. Le second devient

$$\int \frac{d\nu}{\lambda \nu} + \int \frac{\log \log \nu}{\lambda \nu \log \nu} d\nu + \int \frac{\log \lambda \, d\nu}{\lambda \nu \log \nu}$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} \log \nu + \frac{1}{2\lambda} (\log \log \nu)^2 + \frac{\log \lambda}{\lambda} \log \log \nu.$$

On en déduit que, pour $\lambda > 1$, la première partie de l'inégalité (4) n'étant pas vérifiée, l'on a un mode de croissance trop rapide. Le contraire a lieu pour $\lambda = 1$.

(¹) On peut remarquer que $\log \beta_\nu$ devient infini pour $\nu = 1$. Mais il est évident que le raisonnement subsiste tout de même.

On est donc conduit à poser en second lieu

$$\beta_\nu = \nu[\log\nu + \varphi(\nu)],$$

$\varphi(\nu)$ étant une fonction de croissance moins rapide que $\log\nu$, et que nous supposerons au plus de l'ordre de grandeur de $\log\log\nu$.

La valeur approchée du premier et du troisième membre est toujours

$$\log\nu + \log\log\nu.$$

Cherchons celle du second membre. On a

$$\frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\nu\log\nu}\left\{1 - \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu} + \left[\frac{\varphi(\nu)}{\log\nu}\right]^2 - \ldots\right\}$$

et

$$\log\beta_\nu = \log\nu + \log\log\nu + \log\left[1 + \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu}\right]$$

$$= \log\nu + \log\log\nu + \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu}\cdots,$$

d'où

$$\frac{\log\beta_\nu}{\beta_\nu} = \frac{1}{\nu} + \frac{\log\log\nu - \varphi(\nu)}{\nu\log\nu} + \ldots,$$

les principaux termes non écrits contiennent au dénominateur $\nu(\log\nu)^2$, et les numérateurs, d'après l'hypothèse faite sur $\varphi(\nu)$, sont au plus de l'ordre de grandeur de $(\log\log\nu)^2$; ces termes croissent donc moins rapidement que $\frac{1}{\nu(\log\nu)^{1+\sigma}}$, σ étant compris entre 0 et 1. Leur intégrale est donc convergente pour ν infini, et le second membre peut s'écrire, en ne négligeant aucune partie infinie,

$$(5)\qquad \log\nu + \int\frac{\log\log\nu - \varphi(\nu)}{\nu\log\nu}\,d\nu.$$

Si nous posons

$$\varphi(\nu) = \log\log\nu - 1,$$

valeur qui justifie l'hypothèse faite *a priori* sur $\varphi(\nu)$, nous obtenons pour le second membre $\log\nu + \log\log\nu$. La suite des β ainsi formée vérifie alors l'inégalité (4), à condition d'ajouter des constantes convenablement choisies aux membres extrêmes. Il ne peut en être de même d'aucune autre suite formée en ajoutant à $\varphi(\nu)$ une fonction de signe constant et constamment supérieure en module à un nombre fixe ρ, car alors la valeur approchée (5) du second membre se trouve augmentée ou diminuée d'une quantité supérieure à

$$\rho \int \frac{d\nu}{\nu \log\nu} = \rho \log\log\nu,$$

c'est-à-dire devenant infinie.

On peut donc admettre que la suite

$$\beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_\nu = \nu(\log\nu + \log\log\nu - 1)$$

donne une idée approchée de la croissance des nombres premiers. Par inversion de cette formule, les expressions

$$\frac{n}{\log n - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{\log n} + \frac{n}{(\log n)^2}$$

peuvent être prises comme valeurs approchées du nombre d'entiers premiers inférieurs à n.

Riemann a donné pour cette même grandeur la valeur

$$\mathrm{L}i(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}i\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \ldots + (-1)^m \frac{1}{m}\,\mathrm{L}i\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

$\mathrm{L}i(x)$ désignant le logarithme intégral $\int \frac{dx}{\log x}$, et en prenant pour m tous les nombres entiers qui ne sont multiples d'aucun carré parfait.

Les termes les plus importants de $\mathrm{L}i(x)$, qui sont aussi les plus importants de la fonction définie par ce développement, sont

$$\frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \cdots.$$

Ce sont ces deux premiers termes que nous venons de retrouver par une méthode relativement élémentaire.