NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 383-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__383_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2026.

(1905, p. 528.)

Considérons une courbe plane du quatrième ordre avec un seul point double D; *on sait que les six points de contact des tangentes menées à la courbe par le point double tombent sur une conique, et les points de contact* A, B *de cette conique avec ses tangentes issues de* D *appartiennent à la quartique.*

Cela posé, démontrer que, si l'on mène par les deux points A, B *une conique arbitraire qui coupera la quartique en six autres points, les droites qui unissent ces points à* D *coupent ultérieurement la quartique en six points d'une conique.* (V. RETALI.)

SOLUTION
Par M. PARROD.

Prenons pour triangle de référence celui dont les sommets sont : le point double D et les points d'intersection des tangentes au point double avec la quartique.

L'équation de la courbe est alors

$$ax^3z + by^3z + xy\,f(xyz) = 0.$$

La cubique des points de contact des tangentes étant

$$ax^3 + by^3 + xv\,f'_z = 0.$$

Multiplions la deuxième équation par z et retranchons, il vient

$$xy[f(xyz) - zf'_z] = 0.$$

Donc les six points de contact sont situés sur la conique dont on a l'équation. La polaire de l'origine étant $z = 0$, les points A et B sont sur le côté du triangle de référence opposé à D.

L'équation d'une conique quelconque passant par A, B est

$$f(x, y, z) - z\mathrm{P} = 0.$$

Soient xyz un point d'intersection et $x'y'z'$ le point correspondant sur la quartique

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \theta \frac{z}{z'},$$

et l'on a

$$a x'^3 z' + b y'^3 z' + x'y' f(x', y', z') = 0,$$
$$\theta(a x'^3 z' + b y'^3 z') + x'y' f(\theta x', \theta y', z') = 0,$$
$$f(\theta x', \theta y', z') - z' \mathrm{P}_{\theta x'} = 0.$$

Supprimons les accents, on a facilement

$$\theta f(x, y, z) - f(\theta x, \theta y, z) = 0,$$
$$f(\theta x, \theta y, z) - z \mathrm{P}_{\theta x} = 0.$$

Soient

$$f(x, y, z) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{D}yz + \mathrm{E}zx + \mathrm{F}xy,$$
$$\mathrm{P} = \mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z,$$

il vient

$$\theta f(x, y, z) - z(\mathrm{L}\theta x - \mathrm{M}\theta y + \mathrm{N}z) = 0,$$
$$\theta(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{F}xy) - \mathrm{C}z^2 = 0.$$

Éliminons θ, l'équation de la conique passant par les six points est

$$\mathrm{C}[f(x, y, z) - z(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y)] = \mathrm{N}(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{F}xy).$$