Nouvelles annales de mathématiques

Jean Servais

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1906. Première composition de mathématiques (Sciences I)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 359-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__359_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1906.

Première composition de Mathématiques (Sciences I).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On considère, dans l'espace, les droites (D) *dont les équations sont*

$$ux + vy + z + 1 = 0, \qquad x + y + uz + v = 0;$$

on regarde les paramètres u, v *comme les coordonnées d'un point* A *dans un plan* (P); *à chaque point* A *de ce plan correspond, en général, une droite* (D) *et une seule; par un point* M *de l'espace, il passe, en général, une droite* (D) *et une seule.*

Où doit être le point M *pour qu'il passe par ce point une infinité de droites* (D)? *Soit* M_0 *un tel point; quel est le lieu, dans le plan* P, *des points* A *auxquels correspondent les droites* (D), *en nombre infini, qui passent par le point* M_0? *Quand, inversement, le point* A *décrit ce lieu, quelle est la surface décrite par la droite* (D) *qui correspond au point* A?

Lorsque, dans le plan (P), *le point* A *décrit la parabole dont l'équation est* $v = au^2$, *la droite correspondante* (D) *décrit une surface* (Σ) *qui est, en général, du quatrième degré; la précédente étude permet de mettre en évidence des valeurs du paramètre* a *pour lesquelles cette surface contient un plan.*

Construire, en supposant $a = 1$, *la courbe du* *troisième degré, intersection d la surface* (Σ) *et du plan des* xy.

Évaluer l'aire limitée par cette courbe et la droite dont l'équation est $y = 3,5$.

Il est clair qu'à chaque point A, c'est-à-dire, à chaque système de valeurs de u et v correspond une droite (D) et une seule à moins que les deux plans qui définissent (D) ne soient confondus, ce qui a lieu lorsque

$$\frac{u}{1} = \frac{v}{1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{v},$$

c'est-à-dire lorsque le point A occupe l'une des deux positions

$$\Omega \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \qquad \Omega' \begin{cases} u = -1 \\ v = -1 \end{cases}$$

auxquels cas la droite est indéterminée dans le plan

$$(\Pi) \qquad x + y + z + 1 = 0$$

ou

$$(\Pi') \qquad x + y - z - 1 = 0.$$

Si l'on cherche les droites (D) qui passent par un point donné M de coordonnées x, y, z, on est amené à résoudre les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} ux + vy + z + 1 = 0, \\ uz + v \ \ + x + y = 0 \end{cases}$$

en u et v qui admettent en général une solution et une seule sauf lorsque l'on a

$$(2) \qquad \frac{x}{z} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{x+y}.$$

En faisant la somme des termes des rapports (2), on trouve le rapport égal

$$\frac{x+y+z+1}{x+y+z+r}$$

qui est égal à 1, si $x+y+z+1 \neq 0$.

Dans ce cas le point M est sur la droite

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} x = z, \\ y = 1. \end{cases}$$

Lorsque $x+y+z+1=0$, on peut remarquer que les rapports (2) sont aussi égaux à

$$\frac{z+1-x-y}{x+y-z-1}$$

qui est égal à -1, si $x+y-z-1 \neq 0$.

Dans ce cas le point M est sur la droite

$$(\Delta') \qquad \begin{cases} x = -z, \\ y = -1. \end{cases}$$

Enfin, si l'on a à la fois

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ x+y-z-1=0, \end{cases}$$

c'est-à-dire si le point M est sur la droite d'intersection des plans Π et Π',

$$(\Delta'') \qquad \begin{cases} x+y=0, \\ z+1=0. \end{cases}$$

Il y a bien une infinité de solutions pour u et v, car les équations (1) donnent

$$u = v,$$

mais la droite correspondante

$$u(x+y)+z+1=0,$$
$$x+y+u(z+1)=0$$

reste *fixe* et coïncide avec Δ'' lorsque u varie, elle n'est donc pas indéterminée.

En résumé, la droite (D) n'est indéterminée que lorsque le point M est sur l'une des droites Δ ou Δ'.

Soit M_0 un point de Δ de coordonnées

$$x_0 = z_0, \qquad y_0 = 1.$$

Pour ce point les deux équations (1) sont identiques et le lieu de (A) est la droite

$$(L) \qquad u z_0 + v + z_0 + 1 = 0$$

qui passe par le point Ω'.

De même si le point M_0 est sur Δ'

$$x_0 = -z_0, \qquad y_0 = -1,$$

le lieu de A est une droite

$$(L') \qquad u z_0 + v - z_0 - 1 = 0$$

qui passe par le point Ω.

Supposons que le point A décrive la droite (L), la surface engendrée par D aura pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ z & 1 & x+y \\ z_0 & 1 & z_0+1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, se décompose en deux plans :

$$x + y - z - 1 = 0,$$

qui est le plan Π', et

$$x + z + z_0(y + 1) = 0$$

qui est le plan passant par Δ' et le point M_0.

De même, lorsque A décrit la droite (L'), la surface engendrée par (D) se décompose en deux plans :

$$x + y + z + 1 = 0$$

qui est le plan Π, et

$$x - z - z_0(y - 1) = 0$$

qui est le plan passant par Δ et le point M_0.

Lorsque A décrit la parabole

$$(3) \qquad v = au^2,$$

la droite (D) décrit la surface (Σ) dont on obtient l'équation en éliminant u et v entre les équations (1) et (3), ce qui donne

$$(\Sigma) \quad a[y(x+y) - z - 1]^2 = [z(z+1) - x(x+y)](x - yz).$$

Cette surface est du quatrième ordre en général. On prévoit qu'elle se décomposera en une surface du troisième ordre et l'un des plans Π ou Π', lorsque la parabole passera par l'un des deux points Ω ou Ω', c'est-à-dire lorsque

$$a = \pm 1.$$

Faisons, par exemple, $a = 1$ et mettons en évidence dans l'équation de (Σ) le plan Π, il reste la surface du troisième ordre qui a pour équation

$$y[(y-z)(x+y) + z^2] + x^2 - y^2 - zx + z - x - y + 1 = 0.$$

La section par le plan $z = 0$ est la cubique qui a pour équation

$$y^2(x+y) + x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0.$$

Pour construire cette courbe, remarquons d'abord que la droite $x + y = 0$ est évidemment une asymptote d'inflexion, puisqu'elle rencontre la courbe en trois points à l'infini et qu'elle est parallèle à une direction asymptotique simple. La direction de l'axe des x est une direction asymptotique double à laquelle correspond une branche parabolique. En écrivant l'équation sous la forme

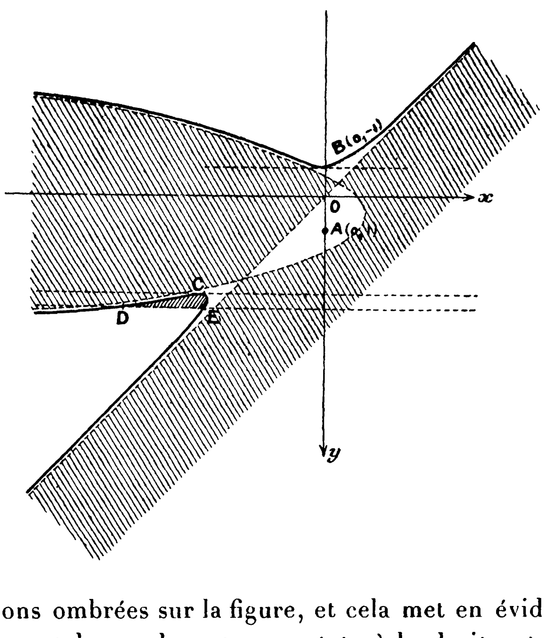
$$(x+y)[y^2+x-y-1]+1=0,$$

on voit que la parabole

$$\text{(P)} \qquad y^2+x-y-1=0$$

est asymptote. Sous cette forme on voit également qu'il n'y a pas de points de la courbe à l'intérieur des

Fig. 1.



régions ombrées sur la figure, et cela met en évidence comment la courbe est asymptote à la droite et à la parabole.

La courbe présente un point double *isolé* au point

$$A: \qquad x=0, \qquad y=1.$$

Transportons les axes en ce point, en posant

$$x = X, \qquad y = 1 + Y.$$

L'équation devient

$$Y^2(X+Y) + X^2 + 2XY + 2Y^2 = 0.$$

Il est alors facile de mettre la courbe sous forme unicursale et de la construire (*fig.* 1).

On peut d'ailleurs également la construire sous la première forme, en résolvant par rapport à x.

L'équation ordonnée en x est

$$x^2 + (y^2-1)x + (y^2-1)(y-1) = 0,$$

ce qui donne, en résolvant,

$$(4) \qquad 2x = 1 - y^2 \pm (y-1)\sqrt{(y+1)(y-3)}.$$

Ceci met en évidence les deux tangentes $y = -1$, $y = 3$ parallèles à ox et tangentes aux points

$$B(x = 0, y = -1) \qquad \text{et} \qquad C(x = -4, y = -3).$$

L'aire demandée est l'aire DCE comprise entre la courbe et la droite de

$$y = 3,5.$$

Elle est égale à

$$S = \int_3^{3,5} x_1\,dy - \int_3^{3,5} x_2\,dy,$$

x_1 et x_2 étant les deux valeurs de x fournies par la formule (4), on a donc

$$S = \int_3^{3,5} (y-1)\sqrt{(y+1)(y-3)}\,dy.$$

En remarquant que $(y-1)$ est la demi-dérivée de la quantité placée sous le radical, on a

$$S = \left\{ \tfrac{1}{3}[(y+1)(y-3)]^{\frac{3}{2}} \right\}_{3}^{3,5},$$

$$S = \tfrac{1}{3}(2,25)^{\frac{3}{2}}.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Les droites (D) forment la congruence des droites qui s'appuient sur deux droites fixes (Δ) et (Δ'). Les coordonnées du point a d'intersection de la droite (D) avec le plan

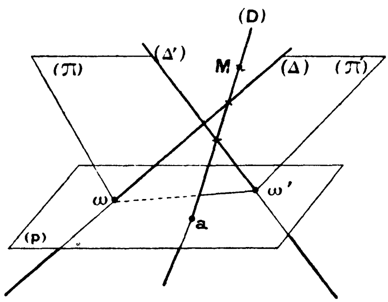
$$(p) \qquad z = -1,$$

sont

$$x = -v, \qquad y = u.$$

On peut donc substituer, sans rien changer d'essentiel dans l'énoncé, le point a au point A, car l'un se déduit de l'autre par une symétrie.

Fig. 2.



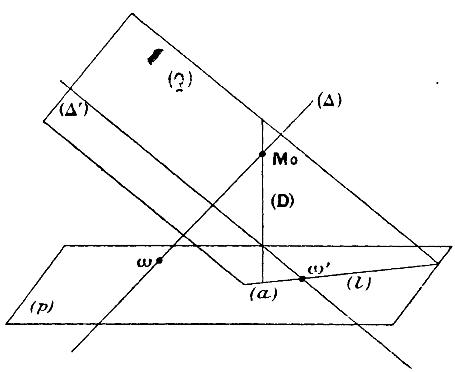
Soient alors (*fig.* 2) ω et ω' les points d'intersection des droites (Δ) et (Δ') avec le plan (p). Par tout point a

du plan (p) passe une droite (D) et une seule qui est l'intersection des plans a, (Δ) et a, (Δ'). Il y a exception lorsque a est en ω, auquel cas la droite (D) est indéterminée dans le plan (Π) passant par ω et (Δ'), ou lorsque a est en ω', auquel cas (D) est indéterminée dans le plan (Π′) passant par ω' et (Δ).

Par un point M de l'espace il passe une droite (D) et une seule qui est l'intersection des plans M, (Δ) et M, (Δ'). Il y a exception lorsque M est situé sur une des deux droites (Δ) ou (Δ'), car, dans ce cas, la droite (D) est indéterminée dans le plan défini par M et l'autre droite fixe.

Soit M_0 un point de (Δ) (*fig.* 3). Toutes les droites (D) passant par M_0 engendrent le plan (Q)

Fig. 3.



passant par M_0 et (Δ'). Le lieu de la trace a de (D) sur le plan (p) est donc la trace (l) du plan (Q) sur (p). Ce lieu est donc une droite (l) passant par ω'. Inversement, lorsque le point a décrit la droite (l), la droite (D), qui n'est autre chose que aM_0, engendre le plan (Q). Il y a toutefois exception lorsque a est en ω', car dans ce cas la droite (D) est indéterminée dans le plan (Π'). La surface engendrée par (D) lorsque a décrit la droite (l) est donc l'ensemble des deux plans (Q) et (Π').

On obtiendrait des résultats analogues pour un point M_0 de (Δ').

Supposons maintenant que le point a décrive dans le plan (p) une courbe algébrique (C) d'ordre m. La droite (D) engendrera une surface réglée (Σ) d'ordre $2m$. Pour le prouver, cherchons en combien de points une droite quelconque (S) rencontre la surface (Σ). Ce nombre sera égal à celui des droites (D) s'appuyant à la fois sur (S) et sur (C). Or, toutes les droites (D) qui s'appuient sur (S) forment en général un hyperboloïde à une nappe. Cet hyperboloïde est coupé par le plan (p) suivant une conique (Γ) qui rencontre la courbe (C) en $2m$ points. Les $2m$ droites (D) qui passent en ces $2m$ points rencontrent (S) aux $2m$ points d'intersection avec (Σ).

Cette surface (Σ) a 3 droites multiples d'ordre m qui sont (Δ), (Δ') et $\omega\omega'$.

En effet, par tout point M_0 de (Δ) il passe m génératrices de (Σ) qui sont les droites joignant M_0 aux m points d'intersection de la droite (l) (*fig.* 3) avec la courbe (C).

Lorsque M_0 décrit (Δ), les m génératrices engendrent m nappes de la surface (Σ) passant par (Δ).

Il y a de même m nappes passant par (Δ').

Imaginons que le point M_0, en décrivant (Δ), tende vers ω. La droite (l) aura pour limite $\omega\omega'$ et les m génératrices (D) de (Σ) passant par M_0 viendront se confondre suivant $\omega\omega'$. Il y a donc également m nappes passant par $\omega\omega'$.

Si la courbe (C) du plan (p) passe par ω, à ce point correspond le plan (Π) et la surface (Σ) se décompose en une surface d'ordre $2m - 1$ et ce plan.

Plus généralement, si la courbe (C) a en ω un point multiple d'ordre r et en ω' un point multiple d'ordre r', la surface (Σ) se décompose en une surface réglée d'ordre $2m - r - r'$, r fois le plan (Π) et r' fois le plan (Π').

En coupant la surface (Σ) par un plan, on obtient comme section une courbe algébrique d'ordre $2m$ qui a trois points multiples d'ordre m et passe par les m points d'intersection du plan sécant avec la courbe (C).

Dans le cas particulier en question, la courbe (C) est une parabole. La surface (Σ) est donc une surface du quatrième ordre ayant trois génératrices doubles (Δ), (Δ') et $\omega\omega'$.

La section par le plan xoy est une courbe du quatrième ordre ayant : deux points doubles à distance finie aux points d'intersection (A) et (B) de (Δ) et (Δ') avec xoy, un point double à l'infini dans la direction $\omega\omega'$ et tangente à la droite de l'infini dans la direction infinie de la parabole.

Lorsque la parabole passe par ω, la surface (Σ) se décompose en le plan (Π) et une surface du troisième ordre; la courbe du quatrième ordre se décompose en la parallèle à $\omega\omega'$ passant par B et une cubique ayant : un point double en A, un point simple en B, un point simple à l'infini dans la direction $\omega\omega'$ et tangente à la droite de l'infini dans la direction infinie de la parabole.