NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur une généralisation de la transformation birationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 355-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__355_1>

[P4h]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. H. LAURENT.

Soient i, i', i'', ... les racines d'une équation algébrique

$$f(z)=0$$

de degré m. On sait que toute fonction rationnelle de i est réductible à la forme $\varphi(i)$, $\varphi(z)$ désignant un polynome entier de degré $m-1$ au plus.

Considérons une fonction de m variables

$$x_0,\quad x_1.\quad \ldots,\quad x_{m-1}$$

de la forme

$$x_0+ix_1+\ldots+i^{m-1}x_{m-1}=y,$$

et une expression de la forme

$$\frac{ay+b}{a'y+b'}=\text{Y}, \tag{1}$$

a, b, a', b' désignant des quantités indépendantes des x mais pouvant contenir i et ses puissances. Si l'on remplace a, b, a', b', y par leurs valeurs exprimées en fonction de i, Y prendra la forme

$$\text{Y}=\text{X}_0+\text{X}_1\,i+\ldots+\text{X}_{m-1}\,i^{m-1}.$$

Pour lui faire acquérir cette forme on observera que Y est de la forme

$$\frac{u_0+u_1\,i+\ldots+u_{m-1}\,i^{m-1}}{v_0+v_1\,i+\ldots+v_{m-1}\,i^{m-1}},$$

où les u et les v sont fonctions linéaires des x, le numérateur et le dénominateur pouvant être remplacés par le reste de leur division par $f(i)$. Cela fait, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par

$$(v_0+v_1\,i'+\ldots)(v_0+v_1\,i''+\ldots)(v_0+v_1\,i'''+\ldots)\ldots$$

qui est une fonction symétrique des racines de $\frac{f(z)}{z-i}$, et qui, par suite, est entier en i; après cette opération, le numérateur et le dénominateur de Y seront des polynomes entiers en x_0, x_1, $\ldots$, x_{m-1} de degré m au plus et le dénominateur ne contiendra plus i, Y aura donc la forme

$$\text{Y}=\frac{\psi_0+\psi_1\,i+\ldots+\psi_{m-1}\,i^{m-1}}{\psi},$$

les ψ étant des fonctions entières des x de degré m.

On aura donc

$$\text{X}_0+\text{X}_1\,i+\ldots+\text{X}_{m-1}\,i^{m-1}=\frac{\psi_0+i\,\psi_1+\ldots+i^{m-1}\,\psi_{m-1}}{\psi}.$$

Or, la racine i étant l'une quelconque des racines de $f(z)=0$, la formule précédente aura lieu en y remplaçant i par i', i'', ..., elle aura lieu pour m valeurs de i et l'on aura

$$(2)\quad X_0=\frac{\psi_0}{\psi},\qquad X_1=\frac{\psi_1}{\psi},\qquad \ldots,\qquad X_{m-1}=\frac{\psi_{m-1}}{\psi}.$$

Ces formules sont birationnelles, c'est-à-dire que l'on peut les résoudre par rapport aux x et exprimer leurs valeurs en fonction rationnelle de $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Ce sont des formules analogues à celles de la transformation quadratique dans l'espace à deux dimensions.

Et, en effet, de la formule (1) on tire

$$y=\frac{AY+B}{A'Y+B'},$$

A, B, A', B' étant des polynomes entiers, et, en reprenant mot pour mot ce que nous venons de dire, on aura

$$x_0=\frac{\Psi_0}{\Psi},\qquad \ldots,\qquad x_{m-1}=\frac{\Psi_{m-1}}{\Psi},$$

les Ψ étant entiers et de degré $m-1$ en $X_0, \ldots, X_{m-1}$.

Les formules (2) sont celles d'un groupe dont il est facile de trouver des invariants différentiels. En considérant Y et y comme des variables complexes formées avec les clefs $i, i^2, \ldots, i^{m-1}$, Y sera fonction de y et aura une dérivée $\frac{dY}{dy}$ bien déterminée, alors

$$\frac{dY}{dy}=\frac{\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0}dx_0+\frac{\partial X_0}{\partial x_1}dx_1+\ldots\right)+i\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_0}dx_0+\ldots\right)\ldots}{dx_1+i\,dx_1+\ldots}$$

ne dépendant pas de $dx_0:dx_1:dx_2:\ldots$, on aura

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+i\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\ldots=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+i\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots\right)=\ldots,$$

et ces équations se décomposeront encore en d'autres après avoir été rendues entières en i, en observant qu'elles ont encore lieu en changeant i en i', i'', ... Toutes ces équations ont pour solutions

$$X_0 = \frac{\psi_0}{\psi}, \qquad X_1 = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \ldots.$$

Si, par exemple, $f(z) = z^2 + 1$, on aura

$$\begin{aligned}
y &= \frac{(a + \alpha i)(x_0 + x_1 i) + b + \beta i}{(a' + \alpha' i)(x_0 + x_1 i) + b' + \beta' i} \\
&= \frac{a x_0 - \alpha x_1 + b + i(\alpha x_0 + a x_1 + \beta)}{a' x_0 - \alpha' x_1 + b' + i(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')} \\
&= \frac{(a x_0 - \alpha x_1 + b)(a' x_0 - \alpha' x_1 + b') + (\alpha x_0 + a x_1 + \beta)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')^2 + (\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')^2} \\
&\quad + \frac{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')(\alpha x_0 + a x_1 + \beta) - (a x_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha' x_0 - \ldots)}{(a' x_0 - \ldots)\ldots} i
\end{aligned}$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{X_0}{(a x_0 - \alpha x_1 + b)(a' x_0 - \alpha' x_1 + b') + (\alpha x_0 + a x_1 + \beta)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')} \\
&= \frac{X_1}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')(\alpha x_0 + a x_1 + \beta) - (a x_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')} \\
&= \frac{1}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')^2 + (\alpha'' x_0 + a' x_1 + \beta')^2}.
\end{aligned}$$

Ces équations sont de la forme

$$\frac{X_0}{uu' + vv'} = \frac{X_1}{u'v - v'u} = \frac{1}{v^2 + v'^2},$$

u, u', v, v' désignant des fonctions linéaires. Si v' est nul, on a

$$\frac{X_0}{uu'} = \frac{X_1}{vu'} = \frac{1}{v^2}.$$