Nouvelles annales de mathématiques

Émile Weber

Sur quelques cercles du plan d'un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 343-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__343_1>

[K2d]

SUR QUELQUES CERCLES DU PLAN D'UN TRIANGLE ;

PAR M. ÉMILE WEBER.

Soient P un point quelconque du plan d'un triangle ABC ; α, β, γ ses coordonnées trilinéaires normales. Désignons par A_1, B_1, C_1 les intersections respectives des côtés BC, CA, AB avec les droites AP, BP, CP. Par les trois points A_1, B_1, C_1 faisons passer un cercle. Celui-ci coupera les côtés de ABC une seconde fois respectivement en A'_1, B'_1, C'_1. On sait que les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 concourent en un même point P' (TERQUEM, *N. A.*, 1842, p. 403 ; G. CANDIDO, *N. A.*, 1900, p. 249).

Nous nous proposons, dans cette étude, de mettre en lumière la relation géométrique unissant les deux points P et P'. Nous établirons ensuite la condition à laquelle ces points doivent satisfaire, pour que le cercle correspondant soit tangent au cercle d'Euler, ce qui nous donnera une extension du théorème de Feuerbach à comparer avec celle que M. Fontené a établie dans les *Nouvelles Annales* (1905) pour une autre famille de cercles.

1. Au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences (Oran, 1888), M. Emile Lemoine a donné l'expression des coordonnées α', β', γ' du point P' en fonction de celles du point P. Il a obtenu :

$$\alpha' = \frac{1}{a\alpha(\Delta - a\alpha)[b\gamma(\Delta - c\gamma) + c\beta(\Delta - b\beta)] - a^2\beta\gamma(\Delta - c\gamma)(\Delta - b\beta)},$$

où $\Delta \equiv a\alpha + b\beta + c\gamma$. β', γ' s'écrivent au moyen de α' par permutations tournantes.

Sous cette forme, les coordonnées α', β', γ' paraissent extrêmement compliquées et peu maniables dans les calculs. Nous allons les définir d'une façon plus simple. A cet effet, observons que α' est proportionnel à :

$$\frac{1}{a\left[\dfrac{b}{\beta(\Delta - b\beta)} + \dfrac{c}{\gamma(\Delta - c\gamma)} - \dfrac{a}{\alpha(\Delta - a\alpha)}\right]}.$$

La même coordonnée, écrite dans le système barycentrique, devient

$$\frac{1}{\dfrac{b}{\beta(\Delta - b\beta)} + \dfrac{c}{\gamma(\Delta - c\gamma)} - \dfrac{a}{\alpha(\Delta - a\alpha)}}.$$

A présent, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées barycentriques de P, on voit *que le point* P' *est* *le réciproque de l'anticomplémentaire d'un point* D, *dont les coordonnées barycentriques sont* $\frac{a^2}{x(y+z)}$, $\frac{b^2}{y(z+x)}$, $\frac{c^2}{z(x+y)}$.

2. Ce point D a une signification remarquable. Pour la faire ressortir, nous allons rappeler un théorème dû à Steiner :

Si l'on joint les trois sommets aux milieux des côtés correspondants B_1C_1, C_1A_1, A_1C_1 *du triangle déterminé par les pieds des droites* AP, BP, CP, *on obtient trois droites courantes en un point* D'. Il est facile de voir que les coordonnées barycentriques de D' sont $x(y+z)$, $y(z+x)$, $z(x+y)$. En les comparant à celles du point D, on voit *que le point* D *est l'inverse triangulaire du point* D'.

3. Appliquons ce qui précède, comme vérification, au cercle d'Euler. Ici, le point P est le point H, orthocentre du triangle fondamental ; le triangle $A_1B_1C_1$ est le triangle orthique. Si nous joignons les sommets aux milieux des côtés du triangle orthique, nous obtiendrons les symédianes de ABC : le point D' est donc, dans ce cas, le point K de Lemoine, dont l'inverse D est le centre de gravité de ABC. D'autre part, le centre de gravité est lui-même le réciproque de son anticomplémentaire. De là découle clairement la notion du cercle des neuf points.

4. Dans certains cas, l'énoncé de la correspondance entre les points P et P' se simplifie en introduisant la notion de la newtonienne d'une transversale. Si

$$Ax + By + Cz = 0$$

est l'équation, en coordonnées barycentriques, d'une transversale, les milieux des diagonales du quadrilatère complet, que cette transversale détermine avec les côtés de ABC, sont sur la droite

$$\sum \frac{-x+y+z}{A} = 0,$$

appelée (par M. de Longchamps) la newtonienne de la transversale.

En écrivant la dernière équation sous la forme :

$$\sum x\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) = 0,$$

il ressort, *que le pôle trilinéaire d'une newtonienne est le réciproque de l'anticomplémentaire du pôle trilinéaire de la transversale correspondante.*

5. Si nous prenons maintenant, pour le point P, le foyer de la parabole de Kiepert $\left(\frac{a^2}{b^2-c^2}, \frac{b^2}{c^2-a^2}, \frac{c^2}{a^2-b^2}\right.$ en coordonnées barycentriques$\left.\right)$, le point D sera le pôle trilinéaire de la droite d'Euler et P′ le réciproque de l'anticomplémentaire de ce pôle. Nous dirons donc : *Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les trois sommets au foyer de la parabole de Kiepert et au pôle trilinéaire de la newtonienne de la droite d'Euler.*

6. Si le point P est le point de Steiner $\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right.$ en coordonnées barycentriques$\left.\right)$, le point D sera le foyer de la parabole de Kiepert et P′ le réciproque de l'anticomplémentaire de ce foyer. En observant que le foyer de la parabole de Kiepert est

le pôle trilinéaire du diamètre de Brocard, nous pourrons énoncer le théorème :

Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les sommets au point de Steiner et au pôle trilinéaire de la newtonienne du diamètre de Brocard.

7. En plaçant le point P au point K de Lemoine, le point D est le point $\frac{1}{b^2+c^2}$, $\frac{1}{c^2+a^2}$, $\frac{1}{a^2+b^2}$, de sorte que son inverse le point D' $[a^2(b^2+c^2), b^2(c^2+a^2), c^2(a^2+b^2)]$ est le point milieu de la distance des deux points de Brocard. En d'autres termes : *si l'on joint les sommets d'un triangle aux milieux des côtés correspondants du triangle formé par les pieds des symédianes, on trace trois droites se coupant au milieu de la distance des deux points de Brocard.*

8. Signalons encore un cas particulier digne de remarque : si P est réciproque de l'orthocentre H, le point D sera l'orthocentre H et nous dirons :

Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les trois sommets au réciproque de l'orthocentre et au pôle de la newtonienne de l'axe orthique.

9. Pour étendre le théorème de Feuerbach aux cercles de cette famille, nous nous appuierons sur la proposition suivante : le cercle circonscrit à un triangle autopolaire à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette courbe.

On peut considérer le triangle $A_1B_1C_1$ comme le triangle diagonal du quadrilatère ABCP et par suite comme triangle autopolaire à l'hyperbole équilatère

ABCP. De même, le triangle $A'_1B'_1C'_1$ est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère ABCP'. Il en résulte que le cercle $A_1B_1C_1$ coupe le cercle d'Euler en deux points, centres des hyperboles équilatères ABCP, ABCP'. *Conséquemment, lorsque* P *et* P' *appartiendront à une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle fondamental, le cercle* $A_1B_1C_1$ *sera tangent au cercle des neuf points.*