Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__332_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

480.

(1859, p. 266; 1899, p. 99.)

Soient D_0 *un cercle,* D_1 *une développante de* D_0, D_2 *une développante de* $D_1, \ldots, D_n$ *une développante de* D_{n-1}. *Appelons* D_n *développante du cercle de l'ordre n. Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant :*

Si une figure plane varie en restant semblable à elle-

même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n, toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre. (P. DE LAFFITTE.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soit (F) une figure plane qui varie dans son plan en restant semblable à elle-même. Toute droite D de cette figure enveloppe une certaine courbe. Pour une position donnée (F), on obtient le point δ où D touche cette enveloppe par la construction suivante, qui est bien connue :

Soit ω le *centre instantané de rotation et de similitude* qui correspond à la position considérée. Le point δ est le point de rencontre de D et d'une droite issue du point ω faisant avec D un angle θ qui ne dépend que des éléments qui caractérisent la variation infinitésimale de (F). Cet angle θ est donc indépendant de la droite particulière considérée D.

Par δ menons la perpendiculaire D' à D. Soient m et m' les projections du point ω sur D et sur D'; ωm et $\omega m'$ sont rectangulaires et l'on a

$$\frac{\omega m'}{\omega m} = \cot\theta.$$

Si donc nous considérons plusieurs droites D quelconques de la figure (F), la figure formée par les droites correspondantes D' dérive de la figure formée par les droites D, par une *rotation* d'un angle droit autour de ω, suivie d'une *homothétie* caractérisée par le rapport $\cot\theta$. Nous parvenons donc à ce résultat :

Soient D_1, D_2, ... *diverses droites de la figure* (F), D'_1, D'_2, ... *les normales aux courbes enveloppes de ces droites, aux points de contact de ces courbes et des droites* D_1, D_2, ... *pour une même position de* (F). *La figure* (D'_1, D'_2, ...) *est semblable à la figure* (D_1, D_2, ...) : *elle reste donc constamment semblable à elle-même.*

Il est maintenant facile d'établir le théorème énoncé par voie de récurrence.

Supposons, en effet, qu'il soit vérifié, quand les développantes de cercle considérées sont de rang $n-1$. Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites de la figure (F), les trois premières enveloppant des développantes de cercle de rang n. Soient D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 les normales aux enveloppes des quatre droites considérées. D'_1, D'_2, D'_3 enveloppent les développées des courbes enveloppes de D_1, D_2, D_3, c'est-à-dire des développantes de cercle de rang $n-1$. Donc, en vertu de l'hypothèse, D'_4 enveloppe aussi une développante de cercle de rang $n-1$. Donc, D_4, etc.

Or, le théorème est vrai si l'on suppose $n=-1$, autrement dit si les droites D_1, D_2, D_3 enveloppent des *développées* de cercle, c'est-à dire passent par des points fixes. Il est, en effet, bien connu que, *si trois droites d'une figure de forme semblable à elle-même passent par trois points fixes, il en est de même de toute autre droite de la figure.*

Le théorème correspondant au cas où $n=0$ est encore bien connu (théorème de Bobillier).

2019.

(1905, p 479.)

Par l'un des axes d'une conique W *on mène un plan* v *perpendiculaire au plan de cette conique; un segment de longueur constante* l *se déplace sous les conditions suivantes : l'une de ses extrémités décrit la conique* W, *il reste constamment normal à cette conique, et son autre extrémité est dans le plan* v; *démontrer que cette seconde extrémité décrit une conique* V (*à laquelle le segment est d'ailleurs constamment normal*).

Avec l'autre axe de la conique W, *et une autre longueur constante* m, *on aura une nouvelle conique* U. *Démontrer qu'un certain segment de longueur constante* p *peut se déplacer en ayant ses extrémités sur les coniques* U *et* V, *et en restant normal à ces deux coniques.*

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

La conique W étant une ellipse dont les demi-axes sont

$$OA = a, \qquad OB = b \qquad (b < a);$$

considérons dans le plan v la droite OC faisant avec OA un angle dont le sinus est $\frac{b}{a}$, l'ellipse est située sur le cylindre d'axe OC et de rayon b. Soit HM un rayon du cylindre dont l'extrémité M est située sur W. Il est normal à OC et à W. Un segment MP de longueur l a son extrémité P sur la perpendiculaire HH' abaissée de H sur OA.

Soient $\mathrm{OH'} = x$ et $\mathrm{H'P} = z$, on a

$$z^2 = l^2 - b^2 + x^2 \frac{b^2}{c^2},$$

ou

$$c^2 z^2 - b^2 x^2 = c^2(l^2 - b^2);$$

V est une hyperbole d'axes OA et Oz et dont une asymptote est OC.

On a de même, pour l'équation de la conique U dans le plan yOz,

$$(b^2 - a^2) z^2 - a^2 y^2 = (b^2 - a^2)(m^2 - a^2)$$

ou

$$c^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2(m^2 - a^2);$$

U est une ellipse dont les axes sont Oy et Oz.

Considérons la conique V comme la conique W et formons dans le plan yOz l'équation du lieu correspondant à une longueur p; en posant

$$\mathrm{A} = l^2 - b^2, \qquad \mathrm{B} = -\frac{c^2}{b^2}(l^2 - b^2),$$

on a

$$(\mathrm{A} - \mathrm{B}) y^2 - \mathrm{B} z^2 = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(p^2 - \mathrm{B})$$

ou

$$a^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 \left(p^2 + \frac{c^2}{b^2}(l^2 - b^2)\right).$$

Déterminons p^2 de façon que cette équation soit identique à celle de U, il suffit que

$$p^2 = c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2}\right).$$

On a ainsi la relation

$$\frac{p^2}{c^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{m^2}{a^2}.$$

Il reste à montrer que le segment MP est normal à la conique V : considérons le segment $M_1 P_1$ voisin de MP; le cylindre de révolution d'axe MM_1 et de rayon l coupe le plan v suivant une conique passant par PP_1; à la limite PP_1 est tangente au cylindre et à la conique V, donc cette tangente est perpendiculaire au rayon MP du cylindre.

Autres solutions de MM. Abramescu, J. Rose et Valère Maës.

2021.

(1905, p. 480.)

Soit un triangle ABC, *et soient* M, N, P *les milieux des côtés. Considérons les projections* D, E, F *d'un même point sur ces côtés. Si a, b, c sont respectivement les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE, *le triangle abc est conjugué par rapport au cercle* DEF.

(G. Fontené.)

NOTE.

Cette question se trouve résolue par l'article de M. Fontené : *Sur le cercle pédal,* du numéro de février.