Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 317-322
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__317_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Dans le plan représentatif de la variable complexe* z, *on trace une circonférence de rayon* R, *ayant pour centre l'origine et coupant en* A *et* B *l'axe des quantités imaginaires, et en* C *la partie positive de l'axe des quantités réelles. Calculer l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^3\,dz}{e^{2i\pi z^4}-1}:$$

1° *Le long de la circonférence précédente;*

2° *Le long du contour formé par la demi-circonférence* ACB *et le diamètre* BA.

On supposera $p < R^3 < p + 1$, p *désignant un entier positif.*

II. *Donner l'expression de la fonction* $e^{2i\pi z^3} - 1$ *sous forme d'un produit infini de facteurs primaires.*

III. *Si* u *et* v *désignent deux paramètres variables indépendants, la droite ayant pour équations :*

$$\begin{aligned} x &= uz - 2u - u^3 - 2uv^3, \\ y &= vz - 3v^2 - u^2v - 2v^4 \end{aligned}$$

(en coordonnées rectangulaires) est normale à une infinité de surfaces qu'on propose de déterminer.

IV. *Déterminer les surfaces* S *telles que, en un point quelconque de l'une de ces surfaces, ses deux tangentes principales, d'une part, et ses deux directions principales, d'autre part, se projettent sur le plan des* xy *suivant deux angles ayant leurs bissectrices parallèles à* Ox *et* Oy.

Lignes de courbure de ces surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'intégrale définie*

$$\int_{1+\varepsilon}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x - 4}} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Cette intégrale a-t-elle une limite pour $\varepsilon = 0$?

Si oui, calculer cette limite. (Juillet 1906.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Parmi les surfaces qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles*

$$px + qy = 0,$$

déterminer celles qui satisfont aussi à la condition

$$(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) = K^2,$$

où K *est une constante donnée, et déterminer leurs lignes de courbure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à* 0,0001 *près l'intégrale définie*

$$u = \int_0^1 \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+2}}:$$

1° *Quand le point* z *va du point* $z = 0$ *au point* $z = 1$ *directement sur l'axe des* x;

2° *Quand le point* z *varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point* $z = \frac{i}{2}$;

3° *Quand le point* z *varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point* $z = \frac{4i}{3}$.

SOLUTION. — On trouve $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

(Juillet 1906.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$\text{(I)} \qquad p^2+q^2 = 2\,\mathrm{U}(x, y), \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

où $\mathrm{U}(x, y)$ *est une fonction connue des variables* x *et* y, *soit* S *une surface intégrale quelconque de cette équation :*

1° *On demande de démontrer que les caractéristiques situées sur cette surface coupent orthogonalement les sections planes faites dans la surface par les plans parallèles au plan des* x, y;

2° *Les courbes caractéristiques* Γ *de l'équation* (I) *se projettent sur le plan des* x, y *suivant une famille de courbes* (γ) *dépendant de deux constantes arbitraires. Former l'équation différentielle du second ordre dont ces courbes* (γ) *sont l'intégrale générale ;*

3° *Déterminer la fonction* $\mathrm{U}(x, y)$ *de façon que les courbes* (γ) *soient des circonférences orthogonales à l'axe des* x;

4° *Trouver une intégrale complète de l'équation* (I) *ainsi obtenue et une intégrale particulière se réduisant à zéro pour* $x = 0$.

NOTE. — *Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.*

II. *On considère l'équation différentielle du premier ordre*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = Xy^2 + X_1,$$

où X *et* X_1 *sont des fonctions de la variable complexe* x *holomorphe à l'intérieur du cercle* C, *de rayon* a, *décrit du point* $x = 0$ *pour centre, et sur ce cercle lui-même. Soit un nombre positif tel que l'on ait*

$$|X| \leqq m, \qquad |X_1| \leqq m \qquad \textit{pour} \qquad |x| \leqq a.$$

L'équation (1) *admet une intégrale particulière* y_1, *holomorphe dans le domaine de l'origine et se réduisant à zéro pour* $x = 0$. *On demande de trouver un nombre positif* ρ, *ne dépendant que de m et de* a, *tel que l'intégrale* y_1 *soit sûrement holomorphe dans le cercle de rayon* ρ *décrit de l'origine pour centre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_1^{13} \frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2x - 1}}}{x - 1}\, dx.$$

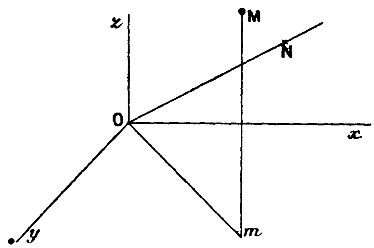
(Juillet 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :*

$$(1) \qquad Pp + Qq = R, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

où les coefficients P, Q, R *sont des fonctions de deux variables indépendantes* x *et* y, *et de la fonction inconnue* z, *on demande ce qu'on entend par caractéristiques de cette équation. Démontrer que l'intégration de l'équation* (1) *revient à la détermination des caractéristiques.*

Application. — *Soient* Ox, Oy, Oz *un système de trois axes de coordonnées rectangulaires,* M *un point d'une surface* (S), m *la projection du point* M *sur le plan* xOy, N *le point où le plan tangent en* M *à la surface* (S) *rencontre la perpendiculaire élevée par l'origine au plan* OmM.



1° *On demande l'équation générale des surfaces* (S), *telles que l'on ait* $ON = Om$, *pour un point quelconque* M *pris sur la surface;*

2° *Déterminer la fonction arbitraire de façon que la surface* (S) *passe par la courbe représentée par les deux équations*

$$y = 0, \qquad z^2 = 2x;$$

3° *Trouver les lignes asymptotiques de cette dernière surface.*

II. *On fait décrire à la variable complexe* z *le segment de ligne droite joignant l'origine au point* $z = +i$. *Quelle est la valeur finale de la fonction* $\arcsin z$, *si la valeur initiale est égale à* $+\pi$?

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(4\cos x + 5)^2}.$$

(Octobre 1905.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad 1 + p^2 + q^2 = q^2 f(y)$$

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles au plan zox.

II. *Les surfaces définies par l'équation*

$$x + pz = \varphi(p) \tag{2}$$

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles à Oy.

III. *Les équations précédentes* (1) *et* (2) *ont toujours des solutions communes.*

IV. *Déterminer ces solutions communes en prenant*

$$f(y) = 1 + \frac{1}{4y^2} \qquad \varphi(p) = ap.$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une lemniscate est donnée dans un plan horizontal : un cercle variable dont le plan est vertical a pour diamètre un rayon vecteur de la lemniscate ; trouver l'aire de la surface ainsi engendrée.*

Prendre des coordonnées polaires : rayon vecteur, longitude φ, *latitude* θ, *et, si le temps le permet, démontrer la formule qui donne l'expression de l'aire au moyen d'une intégrale double.* (Juin 1906.)