JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1906. Composition d'algèbre et trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 313-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__313_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1906. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. *Étudier la variation de la fonction* $y = \mathrm{L}\frac{x-1}{x+2}$, *où* L *désigne un logarithme népérien.*

II. *Évaluer l'intégrale* $\int_0^\alpha \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, *et calculer sa valeur à* $\frac{1}{100}$ *près quand* $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III. *L'équation* $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ *a pour racines les longueurs des côtés d'un triangle* ABC.

Former l'équation ayant pour racines $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

IV. *On donne une fonction* $f(x)$.

Deux autres fonctions $\varphi(x)$ *et* $F(x)$ *sont définies par les relations suivantes, où* K *est un nombre constant :*

$$\varphi(x) = K\int \frac{dx}{f'(x)}, \qquad F(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Démontrer qu'on a identiquement :

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2K}{f(x)\,\varphi(x)},$$

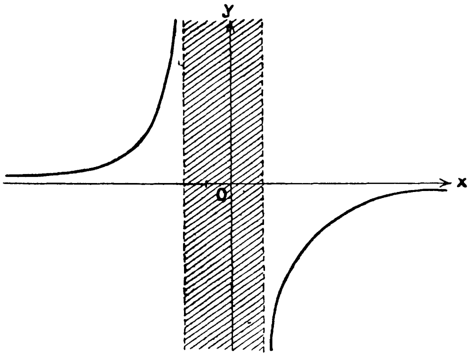
$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

I. Pour que y soit réelle, il faut que l'on ait :

$$\text{soit} \quad x > 1, \qquad \text{soit} \quad x < -2.$$

Dans les deux intervalles $(-\infty, -2)$ et $(1, +\infty)$ la fonction $\frac{x-1}{x+2}$ est *croissante :* dans le premier intervalle elle croît de 1 à $+\infty$, dans le second de 0 à 1. Comme le logarithme népérien varie dans le même sens que le nombre, on a immédiatement le Tableau suivant et la courbe ci-jointe :

x	y
$-\infty$	0
	croît
-2	$+\infty$
$+1$	$-\infty$
	croît
$+\infty$	0



II. Pour évaluer l'intégrale

$$J = \int_0^\alpha \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$

posons $x = \operatorname{tang}\varphi$; supposons le radical pris avec le signe $+$ et désignons par β l'arc positif, plus petit que $\frac{\pi}{2}$, tel que

$$\operatorname{tang}\beta = \alpha;$$

l'intégrale devient :

$$J = \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = [\operatorname{arc\,tang}\sin\varphi]_0^\beta = \operatorname{arc\,tang}(\sin\beta).$$

Or, lorsque

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on a

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc, dans le cas particulier où

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a

$$J = \text{arc tang}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 0,523.$$

III. Soient a, b, c les trois côtés du triangle. On a, comme on sait,

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \\ &= \frac{(a+b+c-2a)(a+b+c)a}{2abc}. \end{aligned}$$

Or, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, on a

$$a+b+c = \alpha, \qquad abc = \gamma.$$

D'où l'on tire

$$1 + \cos A = \frac{a\alpha(\alpha - 2a)}{2\gamma}.$$

Si donc nous désignons par x l'une quelconque des racines de l'équation donnée

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0, \tag{1}$$

et par y la racine correspondante de l'équation cherchée, le problème proposé revient à faire la transformée définie par

$$1 + y = \frac{\alpha x(\alpha - 2x)}{2\gamma}. \tag{2}$$

Il n'y a donc qu'à éliminer x entre cette égalité et l'équation (1). L'égalité (2) s'écrit

$$(3) \qquad 2\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\gamma(y+1) = 0.$$

En multipliant celle-ci par x, l'équation (1) par -2α, et ajoutant, on obtient

$$(4) \qquad \alpha^2 x^2 + 2[\gamma(y+1) - \alpha\beta]x + 2\alpha\gamma = 0.$$

L'équation cherchée est le résultant des équations (3) et (4). C'est donc :

$$[4\alpha^2\gamma - 2\alpha^2\gamma(y+1)]^2 + [4\alpha\gamma(y+1) - 2\alpha^2\beta + \alpha^4]$$
$$[2\alpha^3\gamma + 4\gamma^2(y+1) - 4\alpha\beta\gamma(y+1)] = 0.$$

Ce qui donne, en ordonnant par rapport à $y+1$,

$$8\gamma^2(y+1)^3 + 4\alpha\gamma(\alpha^2 - 4\beta)(y+1)^2$$
$$- 2\alpha^2(\alpha^2\beta - 4\beta^2 + 2\alpha\gamma)(y+1) + \alpha^3(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0.$$

IV. L'égalité donnée

$$\varphi(x) = \mathrm{K}\int \frac{dx}{f'(x)}$$

revient à celle-ci

$$(1) \qquad \varphi'(x)f'(x) = \mathrm{K}$$

qui donne, par dérivation,

$$(2) \qquad \varphi'(x)f''(x) + \varphi''(x)f'(x) = 0.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = f(x)\varphi(x),$$

on a

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

qui, en dérivant, donne

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\mathrm{F}'^2(x)}{\mathrm{F}^2(x)} - \frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi'^2(x)}{\varphi^2(x)}.$$

En remplaçant dans cette égalité $\frac{F'(x)}{F(x)}$ par sa valeur tirée de (3), simplifiant et tenant compte de l'égalité (1), on obtient la première égalité demandée

$$(5) \qquad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2K}{f(x)\,\varphi(x)}.$$

Dérivons, à leur tour, les deux membres de l'égalité (5) et nous obtenons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F'''(x)}{F(x)} &= \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)} \\ &+ \frac{F''(x)\,F'(x)}{F^2(x)} - \frac{f''(x)\,f'(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi''(x)\,\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \\ &- \frac{2K[f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x)\,f(x)]}{f^2(x)\,\varphi^2(x)}. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans cette égalité, $\frac{F''(x)\,F'(x)}{F^2(x)}$ par sa valeur obtenue en multipliant membre à membre les égalités (3) et (5) et nous obtiendrons, toutes simplifications faites, la seconde des égalités demandées :

$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$