S. LATTÈS

Sur les courbes invariantes par polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 308-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__308_0>

[P2a]

SUR LES COURBES INVARIANTES PAR POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. S. LATTÈS.

La détermination de toutes les courbes planes invariantes dans une transformation par polaires réciproques a été effectuée depuis longtemps par M. Darboux qui a traité aussi le problème dans l'espace : M. Darboux détermine la surface invariante la plus générale comme enveloppe d'une famille de quadriques invariantes (¹).

J'ai étudié, d'une façon générale, dans ma thèse (²), les courbes invariantes par une transformation de contact en ramenant leur recherche à la résolution d'équations fonctionnelles. Je me propose de montrer dans cette Note comment le problème résolu par M. Darboux peut être traité, à ce dernier point de vue, du moins dans le cas du plan.

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que la conique directrice a pour équation

$$x^2 - 2y = 0.$$

La transformation par polaires réciproques est alors définie par les équations suivantes :

$$(\mathrm{T}) \qquad X = y', \qquad Y = xy' - y, \qquad Y' = x.$$

(¹) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Note IX).

(²) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Paris, 1906); et *Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XIII.

Soit $y = \Psi(x)$ l'équation d'une courbe invariante par (T). Si (x, y, y') est un élément de cette courbe, l'élément (X, Y, Y') doit appartenir à la même courbe. On doit donc avoir

$$X = \Psi'(x), \qquad \Psi(X) = x\Psi'(x) - \Psi(x), \qquad \Psi'(X) = x;$$

d'où l'on déduit que la fonction $\Psi(x)$ doit vérifier les deux équations fonctionnelles suivantes :

$$\Psi[\Psi'(x)] = x\Psi'(x) - \Psi(x), \tag{E}$$

$$\Psi'[\Psi'(x)] = x. \tag{E'}$$

Nous déterminerons d'abord toutes les solutions de l'équation (E'), puis nous chercherons quelles sont, parmi ces solutions, celles qui vérifient aussi l'équation (E). Si l'on pose

$$\Psi'(x) = \theta(x),$$

l'équation (E') devient

$$\theta[\theta(x)] = x. \tag{E$_1$}$$

Cette nouvelle équation définit une courbe $y = \theta(x)$ invariante par la transformation

$$X = y, \qquad Y = x, \tag{1}$$

qui est une transformation par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Amenons l'axe de symétrie à être l'axe Ox. Il suffit de poser

$$x = u + v, \qquad X = U + V,$$
$$y = u - v, \qquad Y = U - V.$$

La transformation (1) devient alors

$$U = u, \qquad V = -v.$$

Toute courbe invariante par cette transformation peut être définie par les équations

$$u = F(t), \qquad v = \Phi(t),$$

$F(t)$ *étant une fonction paire arbitraire et* $\Phi(t)$ *une fonction impaire arbitraire du paramètre* t. Pour $t = 0$, on a un point où cette courbe coupe l'axe de symétrie : nous supposerons que les fonctions F et Φ sont définies dans le domaine de $t = 0$, le point $t = 0$ pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire.

En remontant à la transformation (1), on voit que toute courbe invariante par cette transformation peut être définie par les équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$y = \theta(x) = F(t) - \Phi(t).$$

On a ainsi la solution générale $\theta(x)$ de l'équation (E_1). La solution générale $\Psi(x)$ de l'équation (E') est donc définie par les équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$\Psi'(x) = F(t) - \Phi(t),$$

$\Psi'(x)$ désignant la dérivée de $\Psi(x)$ *par rapport à* x. On a donc

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$\frac{d\Psi(x)}{dt} = [F(t) - \Phi(t)]\,[F'(t) + \Phi'(t)]$$

et, en intégrant de 0 à t, on voit que la courbe invariante cherchée est définie par les deux équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$y = C + \int_0^t [F(t) - \Phi(t)]\,[F'(t) + \Phi'(t)]\,dt$$

ou bien

$$(2)\quad \begin{cases} x = \mathrm{F}(t) + \Phi(t), \\ y = \mathrm{C} + \dfrac{\mathrm{F}^2(t) - \Phi^2(t)}{2} - \dfrac{\mathrm{F}^2(0)}{2} + \displaystyle\int_0^t (\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}')\,dt \end{cases}$$

et l'on a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(t) - \Phi(t).$$

Il faut chercher, parmi ces courbes, quelles sont celles qui vérifient l'équation (E). Cette équation exprime que, si (x, y, y') est un élément de la courbe, le point

$$\mathrm{X} = y', \qquad \mathrm{Y} = xy' - y$$

appartient aussi à la courbe. Or, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{X} = \mathrm{F}(t) - \Phi(t), \\ &\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{F}^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{\mathrm{F}^2(0)}{2} - \mathrm{C} - \int_0^t (\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}')\,dt. \end{aligned}$$

Changeons t en $-t$ dans ces équations. Elles deviennent

$$\begin{aligned} &\mathrm{X} = \mathrm{F}(t) + \Phi(t), \\ &\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{F}^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{\mathrm{F}^2(0)}{2} - \mathrm{C} - \int_0^{-t} (\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}')\,dt. \end{aligned}$$

Il faut que la courbe définie par ces équations coïncide avec la courbe définie par les équations (2). Comme X et x sont égaux, il faut que Y et y le soient aussi, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\mathrm{F}^2(0)}{2} - \mathrm{C}\right) - \int_0^t (\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}')\,dt \\ - \int_0^{-t} (\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}')\,dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{F}\Phi' - \Phi\mathrm{F}'$ est une fonction *paire* de t et par suite l'intégrale $\int_0^t (F\Phi' - \Phi F')\,dt$ est une fonction *impaire* de t. L'égalité précédente devient donc

$$\frac{F^2(o)}{2} = C.$$

Les équations générales d'une courbe invariante par la transformation (T) *sont donc*

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= F(t) + \Phi(t), \\ y &= \frac{F^2(o)}{2} + \int_0^t [F(t) - \Phi(t)][F'(t) + \Phi'(t)]\,dt, \end{aligned} \right.$$

$F(t)$ *étant une fonction paire arbitraire de* t et $\Phi(t)$ *une fonction impaire arbitraire de* t.

Remarquons que cette courbe contient au moins un élément double de la transformation (T) : c'est l'élément

$$x = F(o), \qquad y = \frac{F^2(o)}{2}, \qquad y = F(o).$$

En ce point la courbe est tangente à la conique directrice.

Parmi les courbes (3) il y a une infinité de courbes algébriques : on en obtient, par exemple, en prenant pour $F(t)$ un polynome en t^2 et pour $\Phi(t)$ le produit de t par un polynome en t^2. La conique directrice $2y - x^2 = o$ s'obtient en prenant $F(t) = t^2$, $\Phi(t) = o$.

On voit que la méthode précédente permet de déduire de toute courbe qui admet un axe de symétrie une courbe qui est sa propre polaire réciproque par rapport à une conique donnée.