NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MÉRAY

Construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points ou neuf plans tangents

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 289-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__289_0>

[L²1b]

CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU SECOND ORDRE DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS OU NEUF PLANS TANGENTS;

PAR M. CH. MÉRAY,

Ancien professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. En 1854, dans un travail d'écolier que l'hospitalité des *Nouvelles Annales* a honoré, j'ai ébauché, pour toutes les coniques, l'emploi des merveilleuses méthodes dont le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles venait de faire connaître le principe et l'application au cercle, dont son *Traité des sections coniques* devait donner en 1865 le développement magistral.

En 1860 (*Annali di Matematica pura ed applicata,* t. III) j'avais poussé un peu plus loin, en indiquant des moyens tout semblables pour l'édification de la théorie géométrique des surfaces du second ordre. L'esprit de la méthode consiste à transférer simplement le rôle joué, pour une conique, par une paire de divisions, ou de faisceaux homographiques, dans un même plan, à un système de deux figures corrélatives *sur des plans de l'espace,* ou de deux *faisceaux corrélatifs,* familles de droites et de plans, issus respectivement de deux points fixes, dont les éléments se correspondent de manière à tracer, sur des plans quelconques, ceux de deux figures corrélatives.

2. J'ai été conduit ainsi à prendre, pour point de départ, deux théorèmes qui sont fondamentaux dans cette théorie :

I. *Le lieu de l'intersection m d'une droite* M' *et d'un plan* $\mathfrak{M}''$, *homologues dans deux faisceaux corrélatifs, de centres* o', o'', *est une surface du second ordre qui passe par ces deux points, y ayant pour plans tangents les homologues* $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ *de la droite* $o'o''$ *rattachée successivement au second faisceau, puis au premier. Et réciproquement, sauf à choisir convenablement les faisceaux.*

II. *L'enveloppe du plan* $\mathfrak{M}$ *déterminé par un point* m' *et une droite* M'', *homologues dans deux figures corrélatives sur des plans fixes* $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$, *est aussi une surface du second ordre, maintenant tangente à ces plans, en* o', o'', *points homologues dans les deux figures respectivement, de la trace mutuelle des mêmes plans, rattachée successivement à l'une et à l'autre. Et réciproquement, sous restriction analogue.*

Ces propositions sont comme identifiées par le *Principe de dualité,* qu'il soit employé à faire la démonstration de l'une par le retournement détaillé des moyens propres à l'autre, ou bien à déduire l'une, *en bloc*, de l'autre préalablement établie, sans parler de voies différentes, qui ne sont ni détournées, ni difficiles. Mais, c'est sur la première, que l'attention se fixe exclusivement, cela pour la même cause qui nous fait concevoir une ligne ou surface par ses *points*, infiniment plus volontiers que par ses *tangentes* ou *plans tangents*.

3. La première partie de ce théorème I est très facile à établir, mais non la réciproque revenant à l'allégation que : *neuf points arbitrairement donnés ap-*

partiennent toujours à quelque lieu, de la nature spécifiée dans l'affirmation directe.

L'existence d'un tel lieu est liée à celle de quelque solution pour le problème :

I. *En nommant* o', o'' *deux des points donnés et* $a_1, \ldots, a_7$ *les sept autres, trouver deux faisceaux corrélatifs, de centres* o', o'', *où les rayons* $o'a_1, \ldots, o'a_7$ *du premier aient pour homologues dans le second, des plans issus respectivement des droites* $o''o_1$, $o''o_2, \ldots, o''a_7$:

II. *En prenant les traces* $a'_1, \ldots, a'_7$ *et* $a''_1, \ldots, a''_7$, *sur deux plans fixes* $\mathfrak{P}'$ *et* $\mathfrak{P}''$, *de ces deux groupes de sept droites respectivement, construire dans ces plans, des figures corrélatives où les points* $a'_1, \ldots, a'_7$ *de l'une aient, pour homologues, des droites passant par* $a''_1, \ldots, a''_7$ *dans l'autre.*

Dans mon Mémoire de 1860 précité, j'ai réussi à résoudre le dernier par un expédient imité de l'artifice qui venait de fournir à M. Chasles sa construction de la surface du second ordre passant par neuf points (*Comptes rendus*, t. XLI, p. 1103). Mais, ramené dernièrement à cette question par un hasard, j'ai aperçu la solution directe exposée ci-après.

4. Pour pouvoir remplir pleinement leur rôle dans la théorie des surfaces du second ordre (pour des motifs d'ordre général encore), les figures corrélatives demandent, dans leur définition, quelques modifications et élargissements. A mes yeux, deux figures (planes) seront corrélatives dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :

I. Ou bien elles sont composées de *points* m', ..., m'', ... respectivement *associés* par la condition, pour leurs coordonnées $(x'\ y'\ z')$, ..., $(x''\ y''\ z'')$, ... (rectilignes homogènes, ou trilinéaires), de satisfaire à une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} c_{11}x'x'' + c_{22}y'y'' + c_{33}z'z'' + c_{23}y'z'' \\ + c_{32}z'y'' + c_{31}z'x'' + c_{13}x'z'' + c_{12}x'y'' + c_{21}y'x'' = 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire linéaire par rapport aux coordonnées de m' et aussi à celle de m'', les lettres c_{11}, ... représentant des constantes.

Chaque même point m' d'une figure a ainsi, dans l'autre, une infinité d'associés m'', dont le lieu est une droite M$''$, du moins en général, et ces objets m', M$''$ sont dits *homologues* l'un à l'autre.

1° Quand le déterminant de l'abaque des coefficients

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} c_{11}, & c_{21}, & c_{31}, \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{32}, \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33} \end{array}\right.$$

n'est pas nul, on reste dans la conception habituelle des figures corrélatives (celle qui est connexe au *Principe de dualité*) : tout point, toute droite d'une figure ont, dans l'autre, une *seule* droite, un *seul* point pour homologues ; à un groupe de points en ligne droite ou de droites concourantes, correspondent toujours un faisceau de droites concourantes ou une division rectiligne de points, avec homographie mutuelle dans les deux cas ; etc.

2° La nullité du même déterminant sans celle de la totalité de ses mineurs d'ordre 2, assure à l'équation (1) la possibilité d'être écrite

$$\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}''_1 + \mathfrak{P}'_2\mathfrak{P}''_2 = 0,$$

où $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ composent une paire réduite de formes linéaires en x', y', z', et de même pour $\mathfrak{P}''_1$, $\mathfrak{P}''_2$ relativement à x'', y'', z''.

Cette circonstance imprime au système des figures un premier degré de dégénérescence. Dans chacune se trouve un point-*pivot* unique, dont les associés dans l'autre figure sont absolument indéterminés; les droites joignant aux pivots deux points associés quelconques composent deux faisceaux homographiques, chacune d'elles étant l'homologue unique d'un point quelconque de l'autre; ....

3° Celle de tous les mineurs précités, mais non de la totalité des éléments de l'abaque (2) permet, pour l'équation (1), cette autre écriture

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'' = 0,$$

où $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ sont des formes linéaires non identiquement nulles, en x', y', z' et x'', y'', z'', et provoque, dans le système des figures, une dégénérescence plus profonde. Chacune possède une droite-*thalweg* dont tout point a ses associés en complète indétermination dans l'autre figure; tout point étranger à une thalweg a pour associés ceux seulement de la thalweg de l'autre figure; ....

II. Ou bien les figures sont formées de *droites* M', ..., M'', ..., pareillement *associées* par la condition pour leurs *coordonnées* (X', Y', Z'), ..., (X'', Y'', Z''), ... (coefficients de x, y, z dans leurs équations), de satisfaire à une équation bilinéaire analogue à (1)

$$C_{11}X'X'' + \ldots = 0.$$

Chaque même droite M′ d'une figure a, dans l'autre, une infinité d'associées ayant en général une enveloppe qui se réduit à un point m'', et M′, m'' sont dits encore *homologues*.

Les trois hypothèses faites successivement sur l'abaque (2) se représentent textuellement pour celui des coefficients de cette équation, avec des conséquences analogues.

1° La correspondance entre les objets M′, m'' est la même qu'entre M″, m', tout à l'heure (I, 1°), et la conception habituelle des figures corrélatives se retrouve au bout d'une autre voie.

2° Dans chaque figure, une droite-*piste* unique a ses associées absolument indéterminées ; les traces marquées sur les pistes par deux droites associées quelconques y forment deux divisions homographiques, chaque trace étant le point homologue unique à une droite quelconque issue de l'autre; ....

3° Un point-*stigmate*, unique dans chaque figure, rend absolument indéterminées les associées de toute droite passant par lui; toute droite ne passant pas par un stigmate a pour associées toutes celles qui rayonnent de l'autre, indistinctement; ....

III. En résumé, dans les premiers cas des deux définitions, leur dissemblance laisse néanmoins la même nature générale aux systèmes de figures qui en dérivent. Dans les deux derniers, c'est le contraire, les figures particularisées par l'un d'eux échappant toujours à l'autre définition ([1]).

([1]) L'extension aux figures homographiques, de la notion des ob-

5. L'allusion faite aux figures corrélatives, dans l'énoncé II du n° 3, vise exclusivement celles qui dérivent de la première des deux définitions précédentes (4, I), et dont j'aurai ainsi à mentionner quelques propriétés successivement. Je ne le ferai qu'*en thèse générale* et *en gros*, pour ne pas franchir le cadre naturel de cette notice par les discussions minutieuses qu'exigeraient une précision et une rigueur absolues.

I. *Dans de telles figures* $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, *les points* m' *d'une droite fixe* D' *de l'une et ceux de leurs associés,* m'', *qui sont situés sur une droite* E'' *de l'autre, forment deux divisions homographiques.*

Car x', y', z' sont alors fonctions linéaires et homogènes de *deux* indéterminées seulement, dont x'', y'', z'' dépendent de la même manière, en vertu de l'équation (1) et de celle de la droite E''.

II. *Leur système est déterminé par la connaissance de huit paires de points associés.*

Car la substitution, dans l'équation (1), des coordonnées des points de ces huit paires, fournit, entre les *neuf* coefficients (2), *huit* conditions linéaires et ho-

---

jets *associés,* permettrait de lier très étroitement leur théorie à celle des figures corrélatives, d'unifier complètement toutes deux; les considérations analytiques propres à l'une et à l'autre mettraient en jeu les *mêmes formules* impliquant les *mêmes lettres,* celles-ci, toutefois, représentant les coordonnées, tantôt de points, tantôt de droites (tantôt de plans dans l'espace). Dans deux figures homographiques planes, l'*association* s'établit non plus entre point et point, ou droite et droite, comme dans les figures corrélatives, *mais entre point et droite toujours, l'associée* d'un point étant toute droite issue de son homologue, *l'associé* d'une droite, tout point situé sur son homologue.

mogènes, d'où, par suite, ceux-ci peuvent être tirés en fonctions linéaires et homogènes d'*une seule* indéterminée λ.

III. *Il est laissé indéterminé par la connaissance de sept paires seulement de points associés, cette condition assignant à une même figure, $\mathfrak{F}'$ par exemple, une infinité de corrélatives possibles ${}^{(1)}\mathfrak{F}''$, ${}^{(2)}\mathfrak{F}''$, ... Mais, dans toutes celles-ci, un même point m'' demeure associé commun à tout même point m' de $\mathfrak{F}'$, et il y a homographie entre tous les faisceaux* $({}^{(1)}\mathrm{M}'', {}^{(2)}\mathrm{M}'', \ldots)$, $({}^{(1)}\mathrm{N}'', {}^{(2)}\mathrm{N}'', \ldots)$, ... *formés ainsi autour de m'', n'', ... par les droites homologues des divers points, m', n', ..., de $\mathfrak{F}'$.*

Car les équations de condition entre les *neuf* coefficients du système ne sont maintenant qu'au nombre de *sept,* et ne fournissent plus leurs valeurs qu'en fonctions linéaires et homogènes de *deux* indéterminées λ, μ. De quoi les faits en question se déduisent bien facilement.

6. Le cas où les figures considérées sont dans un même plan $\mathfrak{L}$ comporte une particularité spéciale, à propos de laquelle il faut noter quelques observations.

I. *Sur ce plan commun il y a des points doubles, c'est-à-dire dont chacun se confond avec un de ses associés, situé ainsi sur sa droite homologue; et le lieu $\mathfrak{S}$, de tels points, est une conique.*

Car alors, on peut prendre identiques les repères coordonnés, auxquels les points associés m', m'' sont rapportés, et les substitutions $x' = x'' = x$, $y' = y'' = y$,

$z' = z'' = z$, faites dans l'équation (1), donnent :

$$(3) \left\{ \begin{array}{c} c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 \\ + (c_{23} + c_{32})yz + (c_{31} + c_{13})zx + (c_{12} + c_{21})xy = 0, \end{array} \right.$$

pour équation du lieu $\mathcal{C}$.

II. *Pour les systèmes* $^{(1)}\Sigma$, $^{(2)}\Sigma$, ... *de figures admettant sept mêmes paires de points associés* (5, III), *les coniques* $^{(1)}\mathcal{C}$, $^{(2)}\mathcal{C}$, ... *passent par quatre mêmes points fixes, et leur faisceau est homographique à ceux de droite, mentionnés au lieu cité.*

Car les coefficients de l'équation (3) sont alors, comme ceux de l'abaque (2) (*loc. cit.*), des fonctions linéaires et homogènes des deux mêmes indéterminées λ, μ.

III. Deux points associés m', m'' seront dits tels *relativement à un point neutre donné* ω, s'ils se trouvent en ligne droite avec lui. D'après cela, *tout point double est associé à lui-même, relativement à un point quelconque du plan commun des figures, considéré comme neutre.*

Quand, pour les sept paires considérées ci-dessus (II), *l'association est relative à un même point neutre* ω, *cette disposition s'étend à toutes les autres paires de points qui sont associés à la fois dans les divers systèmes* $^{(1)}\Sigma$, $^{(2)}\Sigma$, ... (*loc. cit.*), *et une même conique* $\mathcal{C}$ *est engendrée par les points doubles d'un quelconque de ces systèmes.*

1° Les points m', n', ... d'une figure $\mathfrak{F}'$, et d'autres m'', n'', ... pris *en indétermination absolue* sur les droites $\omega m'$, $\omega n'$, ... respectivement, sont visiblement associés dans un système Σ dont les figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ sont douées de pivots confondus avec ω (4, I, 2°). Cela posé, soient ${}^{(1)}\mathfrak{F}''$ la figure corrélative à $\mathfrak{F}'$ dans le système ${}^{(1)}\Sigma$ par exemple, puis ${}^{(1)}m'', {}^{(1)}n'', \ldots$ ceux de ses points qui sont associés à $m', n', \ldots$ relativement à ω, c'est-à-dire les traces des droites $\omega m', \omega n', \ldots$ sur les droites homologues de $m', n', \ldots$. Les points des paires $(m', {}^{(1)}m'')$, $(n', {}^{(1)}n''), \ldots$ étant ainsi associés dans deux des systèmes ${}^{(1)}\Sigma, {}^{(2)}\Sigma, \ldots$, savoir Σ figurant parmi eux et ${}^{(1)}\Sigma$, ils le sont dans tous les autres (5, III), ce qui équivaut à la première partie de l'énoncé.

2° Si enfin ${}^{(1)}m$ désigne un point quelconque de la conique ${}^{(1)}\mathfrak{C}$ appartenant au système ${}^{(1)}\Sigma$, il est associé à lui-même dans ce système, et encore dans le système spécial Σ puisqu'il appartient à la droite $\omega\,{}^{(1)}m$ (1°). Il l'est donc aussi, double en conséquence, dans chacun des autres systèmes ${}^{(2)}\Sigma$, ${}^{(3)}\Sigma, \ldots$, ceci étant le fait formulé par la dernière partie de l'énoncé.

7. Sur les systèmes de deux figures corrélatives $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ *situées dans un même plan* $\mathfrak{P}$, nous pouvons maintenant résoudre les problèmes posés successivement ci-après.

I. *Dans tous les systèmes où trois paires de points associés,* (a'_1, a''_1), (a'_2, a''_2), (a'_3, a''_3), *sont données sur une même droite* A, *on demande l'associé commun* m'' *d'un point* m' *de la première figure par exemple, marqué arbitrairement sur cette droite.*

Les données laissent le système dans une indétermination bien plus étendue que celle dont nous avons parlé au n° 5, III, mais n'en déterminent pas moins ce point m''. Car il est évidemment l'homologue de m' dans la seconde des divisions homographiques définies, sur la même droite A, par la correspondance des points a'_1, a'_2, a'_3 à a''_1, a''_2, a''_3 respectivement (*Ib.*, I).

II. *Dans tous les systèmes où sont données une conique* $\mathfrak{C}$ *comme lieu des points doubles et deux paires de points associés* (a'_1, a''_1), (a'_2, a''_2), *dont les droites sont distinctes, on demande l'associé* m'' *d'un point quelconque* m' *du plan* $\mathfrak{P}$, *attaché à la première figure par exemple.*

Ici, sept paires de points associés sont donnés, savoir deux explicitement, cinq implicitement par le dédoublement d'autant de points déterminant la conique $\mathfrak{C}$, et leurs associations sont toutes relatives à l'intersection ω des droites $a'_1\,a''_1$, $a'_2\,a''_2$. En conséquence, on se trouve dans le cas particulier (6, III) de l'indétermination mentionnée au n° 5, III.

Nommons e, f et g, h les points doubles, tracés, sur la conique $\mathfrak{C}$, par les droites $a'_1\,a''_1$ et $a'_2\,a''_2$. Le point ω''_1 qui, sur $a'_1\,a''_1$, s'associe à ω rattaché à la première figure, dans tous les systèmes constructibles sur les données (a'_1, a''_1), (e, e), (f, f) (1), lui est associé en particulier dans tous ceux que nous considérons. Et de même, pour ω''_2, associé à ω sur la droite $a'_2\,a''_2$, dans tous les systèmes dérivant de (a'_2, a''_2), (g, g), (f, f) prises maintenant pour données. La droite Ω'' qui joint ces deux points est donc homologue à ω dans tous les systèmes considérés, puisqu'elle contient deux de ses associés communs dans tous ces systèmes (4, I).

Si maintenant, sur la droite $\omega m'$, on prend les traces ω'' et i, j de cette homologue Ω'' et de la conique $\mathfrak{C}$, puis les divisions homographiques où ω, i, j correspondent à ω', i, j, le point cherché m'' sera visiblement l'homologue, dans la seconde division, de m' rattaché à la première; car ω, i, j sont respectivement associés à ω'', i, j, sur une même droite $\omega m'$ (5, I).

III. *Construire le système des figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, connaissant la conique $\mathfrak{C}$ lieu de ses points doubles, et trois paires de points associés,* $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, *dont les droites ne passent pas par un même point.* Ceci équivaut à la connaissance de huit paires de points associés (*Cf.* II), détermine le système, en conséquence (5, II).

Soient m' un point quelconque du plan $\mathfrak{P}$, que nous rattacherons à la première figure pour fixer les idées, puis m''_1, m''_2, m''_3 ses associés communs dans les trois familles de systèmes, dérivant de la conique $\mathfrak{C}$ combinée successivement avec les trois couples de paires $\mathfrak{p}_2$ et $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_3$ et $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ (II). Chacun de ces trois points étant évidemment associé à m' dans le système déterminé par *la totalité* des données, tous se trouvent sur la droite homologue M'' de m' dans ce système, et la déterminent (même surabondamment); puis, de même, pour les autres points n', ... de $\mathfrak{F}'$. Or ce système est précisément celui qui était à construire.

IV. *On donne quatre points doubles, trois paires de points associés, soit sept semblables paires au total* (*Cf.* II, III), *et, dans toutes les figures $\mathfrak{F}''$, on demande l'associé commun m'', d'un point quelconque m' de $\mathfrak{F}'$* (5, III).

Parmi les coniques qui passent par les quatre points doubles donnés, nommons ${}^{(1)}\mathfrak{C}$, ${}^{(2)}\mathfrak{C}$, ${}^{(3)}\mathfrak{C}$ les trois consistant en paires de droites, puis ${}^{(1)}M''$, ${}^{(2)}M''$, ${}^{(3)}M''$ les droites homologues à m' dans les systèmes déterminés par les paires de points associés données, combinées successivement avec les trois coniques (III). Comme le point cherché m'' se trouve visiblement sur chacune de ces trois homologues, celles-ci passent toutes par lui, le déterminent en conséquence, même surabondamment.

On remarquera que *cette solution comporte exclusivement des tracés de droites.*

8. La résolution du problème précédent (7, IV) nous permet de passer *au cas où sont distincts les plans* $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, *des figures corrélatives à construire,* ce, à l'aide du lemme suivant dont la démonstration est assez visible pour être omise :

Deux figures respectivement homographiques à deux autres, qui sont mutuellement corrélatives, le sont aussi entre elles.

I. *Dans tous les systèmes où sont données sept mêmes paires de points associés* $(a'_1, a''_1), \ldots, (a'_7, a''_7)$, *on demande l'associé commun* m'' *d'un point quelconque* m' *de la première figure* (5, III).

Ayant marqué arbitrairement sur un plan auxiliaire Π, quatre points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (sous la condition toutefois que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite), nous y construirons les homologues $\alpha'_5, \alpha'_6, \alpha'_7, \mu'$, des points a'_5, a'_6, a'_7, m', dans la seconde des deux figures homographiques (planes) déterminées par la correspondance de a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 à α_1, α_2, α_3, α_4 respectivement, puis les homologues α''_5, α''_6, α''_7, de a''_5, a''_6, a''_7, dans la seconde des figures homographiques déterminées par la correspondance de $a''_1, a''_2, a''_3, a''_4$ maintenant à α_1, α_2, α_3, α_4 encore, puis l'associé commun μ'' de μ' dans tous les systèmes de figures corrélatives, sur le même plan Π, qui ont α_1, α_2, α_3, α_4 pour points doubles avec (α'_5, α_5), (α'_6, α''_6), (α'_7, α''_7) pour autres paires données de points associés (7, IV), finalement, l'homologue m'' de μ'', dans la première figure du dernier des systèmes homographiques qui viennent d'être définis. Ce point m'' sera visiblement celui qui était demandé.

II. *Construire les figures $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, connaissant huit paires de points associés* (5, II).

Si ${}^{(1)}m''$, puis ${}^{(2)}m''$ sont les associés communs d'un point quelconque m' de la première, dans tous les systèmes constructibles sur sept seulement des paires données, puis sur quelque autre combinaison des mêmes paires prises en nombre égal (I), la droite ${}^{(1)}m''\,{}^{(2)}m''$ est visiblement l'homologue M'' de m'.

III. Avec un peu d'attention, on apercevra que l'intervention du plan auxiliaire Π peut être évitée par des tracés *exécutés sur les plans $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ seulement*. Et, comme celle du n° 7, IV, qui en a fourni la base, *ces constructions ne comportent que l'emploi de la règle*.

9. Le problème I ci-dessus (8) est précisément celui qui a été posé au n° 3, II, et qui se trouve maintenant résolu, lui-même et le précédent (*Ib.*, I).

D'après une constatation générale faite antérieurement (5, III), *le système des faisceaux corrélatifs de centres o', o'', dont les éléments homologues donnent, par leurs intersections, les divers points m, ... d'une surface du second ordre passant par ces centres, n'est pas entièrement déterminé; mais, dans toutes ses réalisations possibles, deux mêmes rayons $o'm$ et $o'n$ pris arbitrairement dans le premier faisceau, par exemple, ont pour homologues des plans* ${}^{(1)}\mathcal{M}''$, ${}^{(2)}\mathcal{M}''$, ${}^{(3)}\mathcal{M}''$, ... *et* ${}^{(1)}\mathcal{N}''$, ${}^{(2)}\mathcal{N}''$, ${}^{(3)}\mathcal{N}''$, ..., *rayonnant des droites $o''m$ et $o''n$ en deux faisceaux mutuellement homographiques.*

Sur un même plan sécant $\mathfrak{P}$, ces systèmes auraient pour traces des systèmes de figures corrélatives, indéterminées aussi, mais où *tout point m' d'une figure aurait dans l'autre un associé commun m'' relativement à la trace ω de la droite des centres o', o''*, dont une même conique serait *le lieu commun des points doubles.* Cette conique est précisément la trace de la surface sur le plan sécant.

10. Pour une surface du second ordre, *considérée comme enveloppe de ses plans tangents* (2, II), on construira le pendant exact de tout ce qui précède, en en retournant les détails dans le sens indiqué par le *Principe de dualité*, après adoption, pour deux figures corrélatives planes, de la définition II du n° 4.

Quand il s'agit de figures corrélatives sur un même plan, la relativité à un point neutre ω, de l'association de deux points m', m'' appartenant à l'une et à l'autre (6, III), sera remplacée par *celle à une droite neutre* Ω, de l'association de deux droites M', M'', ces mots exprimant ici que le point de concours de M', M'' se trouve sur Ω.