NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1906. Composition de géométrie analytique et mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 271-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__271_0>

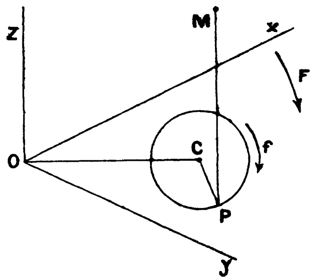
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1906. COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère un système d'axes rectangulaires fixes, Ox, Oy, Oz, *et, dans le plan* xOy, *un cercle* (C) *de rayon* $\frac{1-m}{2}a$ *animé d'un mouvement de translation, dans lequel son centre* C *décrit dans le sens de la flèche* F, *et avec une vitesse angulaire* $(1-m)\omega$, *un cercle de centre* O *et de rayon* $\frac{1+m}{2}a$.

En même temps que ce cercle (C) *se déplace, un point* P *est mobile sur sa circonférence, et la parcourt dans le sens de la flèche* f, *avec la vitesse angulaire* $(1+m)\omega$. *Il décrit ainsi une courbe* (E) (*Épicycloïde*).

Fig. 1.



Les quantités a, ω, m *sont trois constantes positives, dont la dernière est moindre que l'unité.*

I. *On demande d'exprimer en fonction du temps*

t, les coordonnées x, y du point P, *sachant qu'à l'époque $t = 0$ les points* C *et* P *sont tous deux sur la partie positive de* Ox, P *à la distance a du point* C.

II. *Le point* P *est la projection d'un point* M, *mobile dans l'espace : on demande d'exprimer sa cote z en fonction du temps t, sachant qu'elle est nulle à l'époque $t = 0$, et que la vitesse v de* M *fait avec l'axe* Oz *un angle constant θ quelconque d'ailleurs.*

On montrera que la trajectoire (K) *du point* M *s'obtient en coupant le cylindre dont* (E) *est la section droite par un ellipsoïde de révolution autour de* Oz : $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, *où la longueur b varie avec θ.*

On introduira, au lieu de θ, la constante b dans la représentation de la cote z du point M.

III. *Calculer la grandeur et les cosinus directeurs α, β, γ de la vitesse v du point* M, *ainsi que l'arc de la courbe* (K) *parcouru par ce mobile pendant le temps t. Exprimer, en fonction du temps, le rayon de courbure* R *de la courbe* (K), *et vérifier que la vitesse lui est proportionnelle.*

IV. *Après avoir formé l'équation du plan osculateur de la courbe* (K), *on démontrera que, à une époque t, tous ceux de ces plans qui correspondent aux diverses courbes* (K) *qu'on obtient en faisant varier b, passent par une même droite Δ du plan xOy.*

V. *Montrer que, lorsque t varie, cette droite Δ enveloppe une épicycloïde* (E') *homothétique à celle que décrit le point* P' *diamétralement opposé au* *point* P *dans le cercle* (C). — *Faire voir que la courbe* (E′) *a pour développée l'épicycloïde* (E).

I. Au bout du temps t, les coordonnées du centre C, rapporté aux axes fixes Ox et Oy, sont :

$$\frac{(1+m)a}{2}\cos(1-m)\omega t \qquad \text{et} \qquad \frac{(1+m)a}{2}\sin(1-m)\omega t,$$

celles du point P, rapporté aux axes menés par C parallèlement à Ox et Oy,

$$\frac{(1-m)a}{2}\cos(1+m)\omega t \qquad \text{et} \qquad \frac{(1-m)a}{2}\sin(1+m)\omega t.$$

Les coordonnées de P rapportées à Ox et Oy sont donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}[(1+m)\cos(1-m)\omega t+(1-m)\cos(1+m)\omega t],\\ y &= \frac{a}{2}[(1+m)\sin(1-m)\omega t+(1-m)\sin(1-m)\omega t],\end{aligned}\right.$$

qu'on peut encore écrire

$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} x &= a(\cos\omega t\cos m\omega t + m\sin\omega t\sin m\omega t),\\ y &= a(\sin\omega t\cos m\omega t - m\cos\omega t\sin m\omega t).\end{aligned}\right.$$

II. On tire immédiatement de là

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a(1-m^2)\omega\sin\omega t\cos m\omega t,\\ \frac{dy}{dt} &= a(1-m^2)\omega\cos\omega t\cos m\omega t,\end{aligned}\right.$$

et, par suite, pour la vitesse u du point P,

$$u=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=a(1-m^2)\omega\cos m\omega t.$$

Mais, puisque la vitesse du point M fait l'angle constant θ avec MP, on a

$$(3)\qquad \frac{dz}{dt} = \frac{u}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{a(1-m^2)\omega}{\operatorname{tang}\theta}\cos m\omega t,$$

et, par suite, en intégrant et tenant compte de ce que $z = 0$ pour $t = 0$,

$$(4)\qquad z = \frac{a(1-m^2)}{m\operatorname{tang}\theta}\sin m\omega t.$$

Or, des formules (1 *bis*), on tire immédiatement

$$(5)\qquad x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 m\omega t + m^2\sin^2 m\omega t).$$

Donc,

$$1 - \frac{x^2+y^2}{a^2} = (1-m^2)\sin^2 m\omega t = \frac{m^2\operatorname{tang}^2\theta}{a^2(1-m^2)}z^2,$$

et l'on voit que l'on a bien

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

si l'on pose (¹)

$$(6)\qquad b = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{m\operatorname{tang}\theta}.$$

Remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ par sa valeur tirée de là dans (4), on a

$$(4\ bis)\qquad z = b\sqrt{1-m^2}\sin m\omega t.$$

III. On a maintenant pour la vitesse v du point M

$$(7)\qquad v = \frac{1}{\cos\theta}\frac{dz}{dt} = \frac{a(1-m^2)\omega}{\sin\theta}\cos m\omega t$$

(¹) Il est facile de voir que, si l'on pose $m = \cos\varphi$, φ est l'anomalie excentrique des points de rebroussement (points les plus hauts) de la ligne d'égale pente tracée par le point M sur l'ellipsoïde de révolution.

et pour ses cosinus directeurs

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{dt} = -\sin\theta\sin\omega t, \\ \beta = \dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{dt} = \sin\theta\cos\omega t, \\ \gamma = \dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{dt} = \cos\theta, \end{cases}$$

cette dernière expression fournissant une vérification (1).

Quant à l'arc de courbe, vu les conditions initiales, il est donné par

$$(9)\qquad s = \int_0^t v\,dt = \frac{a(1-m^2)}{m\sin\theta}\sin m\omega t.$$

Si maintenant α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la normale principale, on a

$$\begin{aligned} \frac{v}{R}\alpha' &= \frac{d\alpha}{dt} = -\omega\sin\theta\cos\omega t, \\ \frac{v}{R}\beta' &= \frac{d\beta}{dt} = -\omega\sin\theta\sin\omega t, \\ \frac{v}{R}\gamma' &= \frac{d\gamma}{dt} = 0, \end{aligned}$$

d'où, faisant la somme des carrés et tenant compte de ce que $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$,

$$(10)\qquad \frac{v}{R} = \omega\sin\theta,$$

---

(1) Si, dans ces formules et dans les suivantes, on voulait introduire b au lieu de θ, il suffirait de remarquer que de (6), qui peut s'écrire $\tang\theta = \dfrac{a\sqrt{1-m^2}}{bm}$, on tire

$$\sin\theta = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{a^2(1-m^2)+b^2m^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{mb}{\sqrt{a^2(1-m^2)+b^2m^2}}.$$

et, en rapprochant de (7),

$$\text{(11)} \qquad R = \frac{a(1-m^2)}{\sin^2\theta}\cos m\omega t.$$

On a, en outre,

$$\alpha' = -\cos\omega t, \qquad \beta' = -\sin\omega t, \qquad \gamma' = 0.$$

IV. Le plan osculateur au point (x, y, z) a pour équation

$$AX + BY + CZ = Cx + By + Cz$$

avec (puisqu'il contient la tangente et la normale principale)

$$\frac{A}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = \frac{B}{\gamma\alpha' - \gamma'\alpha} = \frac{C}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

ou

$$\frac{A}{\cos\theta \sin\omega t} = \frac{B}{-\cos\theta\cos\omega t} = \frac{C}{\sin\theta},$$

ou encore

$$\frac{A}{\sin\omega t} - \frac{B}{-\cos\omega t} = \frac{C}{\operatorname{tang}\theta}.$$

Or, si l'on multiplie les formules (1 *bis*) respectivement par $\sin\omega t$ et $-\cos\omega t$, la formule (4) par $\operatorname{tang}\theta$, et si l'on additionne, on a

$$\text{(12)} \qquad x\sin\omega t - y\cos\omega t + z\operatorname{tang}\theta = \frac{a}{m}\sin m\omega t.$$

C'est donc là l'équation du plan osculateur, si l'on y regarde x, y, z comme des coordonnées courantes.

La trace Δ de ce plan sur le plan Oxy est

$$\text{(13)} \qquad x\sin\omega t - y\cos\omega t = \frac{a}{m}\sin m\omega t,$$

indépendante de θ, donc de b.

V. Pour avoir l'enveloppe de cette droite Δ, il faut éliminer t entre cette équation (13) et sa dérivée par rapport à t, qui peut s'écrire

$$(14) \qquad x \cos \omega t + y \sin \omega t = a \cos m \omega t.$$

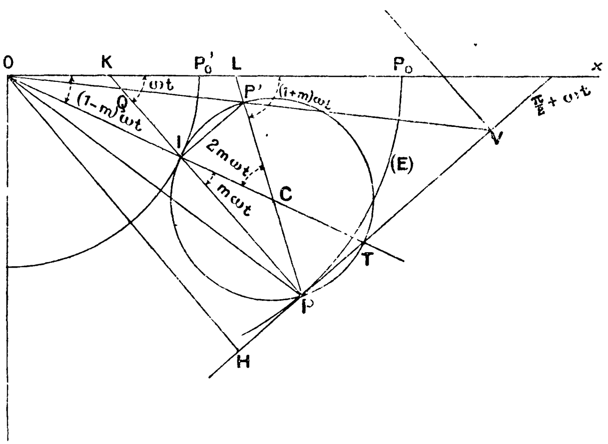
Au lieu d'éliminer t, on peut représenter cette enveloppe paramétriquement en tirant de là

$$x = \frac{a}{m}(\quad \sin \omega t \sin m \omega t + m \cos \omega t \cos m \omega t),$$

$$y = \frac{a}{m}(- \cos \omega t \sin m \omega t + m \sin \omega t \cos m \omega t).$$

Or, pour avoir le lieu du point P′ diamétralement opposé à P dans le cercle (C), il faut dans les for-

Fig. 2.



mules (1 *bis*) remplacer ωt et $m \omega t$ par ces mêmes angles augmentés de $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne précisément les dernières formules écrites, à cette différence près que c'est a au lieu de $\frac{a}{m}$ qui figure en dehors de la parenthèse.

Donc l'enveloppe de Δ est une épicycloïde (E') homothétique de celle que décrit le point P' par rapport à l'origine O, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{m}$.

Remarquons maintenant que la droite (13), qui passe par le point où Δ (13) touche son enveloppe, est perpendiculaire à cette droite; c'est donc la normale à (E'), et son enveloppe s'obtient en éliminant t entre (14) et sa dérivée par rapport à t

$$x \sin \omega t - y \cos \omega t = am \sin m\omega t. \tag{15}$$

Or, on voit immédiatement que, si l'on tire x et y de (14) et (15), on retombe sur les formules (1 *bis*), ce qui montre que la développée de (E') se confond avec le lieu de P.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. La vitesse relative du point P [tangente au cercle (C)] et sa vitesse d'entraînement (équipollente à celle de C, par suite, perpendiculaire à OC) sont toutes deux égales à $\frac{(1-m^2)a\omega}{2}$. Leur résultante, vitesse absolue de P, est donc dirigée suivant la bissectrice PT de leur angle, T étant le point où le rayon OC prolongé rencontre le cercle (C). Par suite, la normale à la trajectoire (E) de P passe par le point I diamétralement opposé à T, et, comme ce point I est le même quel que soit le point P choisi sur (C), c'est le centre instantané de rotation du cercle sur lequel serait marqué le point P. Le lieu de ce centre I sur le plan du cercle (C) est ce cercle lui-même; sur le plan fixe, c'est le cercle de rayon OI. Donc, le mouvement de P peut s'obtenir par roulement du premier de ces cercles sur le second, et la courbe que décrit ce point est une épicycloïde (E).

On peut remarquer, en outre, que, d'après l'énoncé

$$\widehat{xOC} = (1 - m)\omega t, \qquad \widehat{xLP} = (1 + m)\omega t,$$

d'où l'on déduit

$$\widehat{ICP'} = 2m\omega t.$$

Et, comme

$$OI = OC - CP = ma,$$

on vérifie immédiatement l'égalité des arcs P'_0I et IP' donnés respectivement par

$$\text{arc}\, P'_0 I = ma(1 - m)\omega t$$

et

$$\text{arc}\, IP' = \frac{(1 - m)a}{2} 2m\omega t.$$

Remarquons encore que l'on a

$$OT = OC + CP = a$$

et

$$\widehat{PIT} = \frac{\widehat{ICP'}}{2} = m\omega t;$$

d'où l'on déduit

$$\widehat{PKx} = \widehat{xOC} + \widehat{PIT} = \omega t.$$

II. La vitesse absolue u du point P, dirigée suivant PT, fait avec la vitesse relative, dirigée suivant la tangente en P au cercle (C), un angle égal à PIT ou $m\omega t$. Et, puisque, comme nous venons de le voir, la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse relative, c'est-à-dire à $\frac{a(1 - m^2)\omega}{2}$, nous avons

$$u^2 = 2\frac{a^2(1 - m^2)^2\omega^2}{4}(1 + \cos 2m\omega t)$$
$$= a^2(1 - m^2)^2\omega^2\cos^2 m\omega t.$$

Or, la vitesse v du point M fait avec sa projection u un angle constant égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$; on a donc

$$v = \frac{a\omega(1 - m^2)}{\sin\theta} \cos m\omega t.$$

C'est la formule (7) ci-dessus. Pour en déduire z, il suffit de remarquer que, le lieu du point M étant une hélice, on a

$$\frac{dz}{dt} = v\cos\theta;$$

d'où, par intégration, la formule (4). Pour faire voir que l'hélice en question se trouve sur l'ellipsoïde ci-dessus défini, il suffit donc d'établir directement la formule (5). Or, rien n'est plus simple; abaissons, en effet, de O la perpendiculaire OH sur PT; cette perpendiculaire fait avec OC un angle égal à PIC ou $m\omega t$, et l'on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \mathrm{OP}^2 &= \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HP}}^2 \\ &= \overline{\mathrm{OT}}^2 \cos^2 m\omega t + \overline{\mathrm{OI}}^2 \sin^2 m\omega t \\ &= a^2 \cos^2 m\omega t + m^2 a^2 \sin^2 m\omega t. \end{aligned}$$

C'est précisément la formule (5).

III. La formule (7) vient d'être obtenue. Il suffit de remarquer qu'en vertu d'une propriété connue de l'hélice, on a

$$s = \frac{z}{\cos\theta},$$

pour déduire de (4) la formule (9). Reste à obtenir les formules (8) et (10). Or, rien n'est plus aisé géométriquement. En effet, la projection PT du vecteur vitesse fait avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{2} + \omega t$, et, d'autre part, ce vecteur fait lui-même avec Oz un angle égal à θ. On a donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = -\sin\theta \sin\omega t,\\
\beta &= \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \quad \sin\theta \cos\omega t,\\
\gamma &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Ce sont les formules (8). De plus, la considération de l'indicatrice sphérique (ici un cercle parallèle au plan Oxy) donne immédiatement pour l'angle de contingence $d\varepsilon$

$$d\varepsilon = \sin\theta\, d\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \omega \sin\theta\, dt.$$

D'où

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{\dfrac{ds}{dt}}{\dfrac{d\varepsilon}{dt}} = \frac{v}{\omega \sin\theta}.$$

C'est la formule (10).

IV. Le plan osculateur à l'hélice décrite par le point M contenant la normale principale, c'est-à-dire la normale au cylindre mené par (E) parallèlement à Oz, normale qui se projette sur Oxy suivant PK, a pour trace sur ce plan Oxy, la parallèle à PK (c'est-à-dire la perpendiculaire à PT) menée par le point V où la tangente à l'hélice rencontre Oxy. Or, la sous-tangente PV étant égale à l'arc PP_0 de l'épicycloïde (E) décrite par P, est indépendante de l'angle θ de l'hélice, et, par suite, il en est de même de la trace du plan osculateur.

D'autre part, puisque le plan osculateur a pour caractéristique la tangente, la trace de ce plan osculateur touche son enveloppe au point V où elle est rencontrée par cette tangente. Ceci montre que VP est normale à cette enveloppe qui est, par suite, une développante de (E).

Reste à faire voir qu'elle est homothétique de l'épicycloïde décrite par le point P′, par rapport au point O. Or, la sous-tangente PV est donnée par

$$PV = z \tang \theta$$

ou, en vertu de la formule (4), par

$$PV = \frac{a(1-m^2)}{m} \sin m\omega t.$$

On a donc

$$\begin{aligned} TV &= PV - PT \\ &= \frac{a(1-m^2)}{m} \sin m\omega t - a(1-m)\sin m\omega t \\ &= \frac{a(1-m)}{m} \sin m\omega t. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$IP' = 2IC \sin \frac{ICP'}{2} = a(1-m)\sin m\omega t.$$

Par suite,

$$\frac{TV}{IP'} = \frac{1}{m};$$

comme, d'ailleurs, TV et IP′ sont parallèles (comme perpendiculaires à PI), et que l'on a aussi

$$\frac{OT}{OI} = \frac{1}{m},$$

on voit que les points P′ et V sont en ligne droite avec le point O, et que l'on a

$$\frac{OV}{OP'} = \frac{1}{m},$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Remarque. — En vertu de la construction de Savary, ou mieux d'Euler, le point Q est le centre de courbure de l'épicycloïde (E). Or, le triangle OP′C, coupé par la transversale PIQ, donne

$$\frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{QP'}}\,\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{PC}}\,\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{IO}} = 1;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QP'}} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PP'}}\,\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{IC}} = \frac{1}{2}\,\frac{ma}{\frac{(1-m)a}{2}} = \frac{1-m}{m}$$

et

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP'}} = m.$$

Par suite, en vertu de la dernière égalité obtenue,

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OV}} = m^2;$$

d'où ce théorème connu que la développante et la développée d'une épicycloïde sont homothétiques.