A. MANNHEIM

Note à propos de la question 1960

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 228-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__228_1>

[L¹6a]

NOTE A PROPOS DE LA QUESTION 1960 [1];

PAR M. A. MANNHEIM.

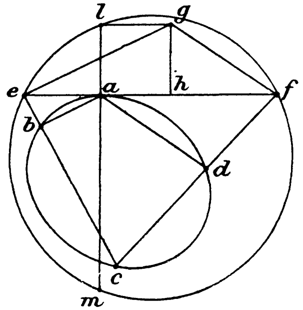
Ainsi que dans la solution insérée en 1903 (p. 476), commençons par parler de ce problème :

Construire (fig. 1) le rayon de courbure en un

[1] *Nouvelles Annales*, 1903, p. 48 et 476.

point a d'une conique, connaissant la tangente en ce point et les points b, c, d.

Fig. 1.



Appelons e et f les points où la tangente en a est coupée par les droites cb, cd, et désignons par ρ le rayon de courbure de la conique pour le point a.

On a la relation [1]

$$(1)\qquad \frac{1}{ae}+\frac{1}{af}=\frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} eab}+\frac{1}{\operatorname{tang} daf}\right).$$

Au lieu de rester dans le cas général, nous allons supposer que les angles eab, daf sont égaux et que le point c est sur la normale en a. Pour bien marquer ces nouvelles données, nous supposons (*fig.* 2) que la conique est tangente en M à une ellipse donnée, qu'elle passe par les foyers F, F′ de cette courbe et par un point arbitraire C de la normale en M. Dans ces conditions, la relation (1) devient

$$(1)'\qquad \frac{1}{\mathrm{MB}}+\frac{1}{\mathrm{MD}}=\frac{1}{\rho \operatorname{tang}(\mathrm{BMF})}.$$

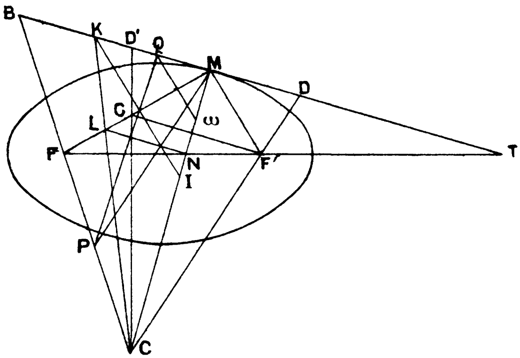
---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1890

Appelons N le point où la normale MC coupe FF'. Par F', N menons des parallèles à MB; elles coupent MF aux points G, L.

Les points M, G, L, F forment une division harmonique.

Fig. 2.



Par suite, il en est de même des points M, D', K, B.

On a alors

$$\frac{2}{\mathrm{MK}} = \frac{1}{\mathrm{MB}} + \frac{1}{\mathrm{MD}},$$

puisque

$$\mathrm{MD} = \mathrm{MD'}.$$

La relation (1)' devient alors

$$\frac{2}{\mathrm{MK}} = \frac{1}{\rho \operatorname{tang}(\mathrm{BMF})}.$$

Abaissons la perpendiculaire KI sur MF, on a

$$\mathrm{MK} = \mathrm{MI} \operatorname{tang}(\mathrm{BMF}),$$

par suite,

$$\frac{2}{\mathrm{MI}} = \frac{1}{\rho}.$$

Le centre de courbure de la conique est donc le milieu ω *de* MI.

On voit que la construction de ω est réduite à ceci. On mène la droite CL. Du point où elle coupe la tangente MB on abaisse sur MF la perpendiculaire KI, le milieu ω de MI est le centre de courbure cherché.

On peut remarquer qu'on peut inversement prendre C, afin d'obtenir un centre de courbure que l'on se donne.

Remarquons encore que la construction ne dépend pas de la position des points F, F′ sur les droites MF, MF′. Pour chacune des positions de la droite FF′, qui tourne autour de N, on a une conique comme précédemment et *toutes ces coniques ont en* M *un contact du second ordre.*

Enfin, si le point C est le centre de courbure de l'ellipse donnée, il est sur la perpendiculaire élevée de L à MF, le point K appartenant à cette perpendiculaire, on voit que le point I se confond avec le centre de courbure de l'ellipse donnée. *Le centre de courbure* ω *est alors au milieu du rayon de courbure de l'ellipse donnée.* On peut donc énoncer cette propriété :

On a une ellipse de foyers F, F′ *et dont le rayon de courbure pour son point* M *est* Mμ : *la conique tangente en* M *à l'ellipse, et qui passe par* F, F′, μ, *a pour centre de courbure le milieu de* Mμ.

Arrivons maintenant à ce problème :

Construire le rayon de courbure en un point d'une conique, connaissant la tangente en ce point et trois autres tangentes.

Nous ne le traiterons ici qu'avec des données particulières. Démontrons d'abord ce lemme :

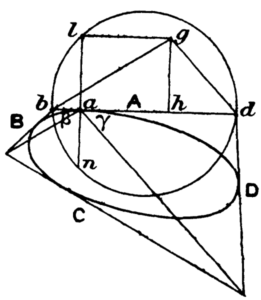
On donne une ellipse de foyers F, F′ (*fig.* 2); *si une conique touche cette courbe en* M *et passe par* F, F′, *ses tangentes en ces points se coupent sur la normale en* M *à l'ellipse donnée.*

Appelons T le point où la tangente en M à l'ellipse coupe l'axe focal. La polaire de ce point, par rapport à une conique qui passe par F, F′ et est tangente en M à l'ellipse, est la normale MN, puisque N est conjuguée harmonique de T par rapport à F et F′ et que cette droite passe par M.

Il résulte de là que les tangentes à cette conique aux points F, F′ se coupent sur MN.

Dans le cas général où les données pour une conique sont (*fig.* 3) le point a, la tangente en ce point et les

Fig. 3.



tangentes B, C, D, on a pour déterminer le rayon de courbure de cette courbe la relation suivante [1] :

$$(2) \qquad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ad} = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\tang\beta} + \frac{1}{\tang\gamma}\right).$$

[1] *Comptes rendus*, séance du 15 mars 1875.

Prenons maintenant des données particulières.

Supposons qu'en outre de la tangente en M (*fig.* 2) les trois tangentes données soient BF, FC, CD. La relation (2) devient

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{2}{r\,\text{tang}(BMF)}.$$

Mais le premier membre de cette égalité, ainsi qu'on l'a vu précédemment, est égal à $\frac{2}{MK}$, alors

$$MK = r\,\text{tang}(BMF).$$

Donc le point I *est le centre de courbure demandé.*

On voit que, pour un point arbitraire C de la normale en M, il suffit de mener CL qui détermine K sur MB et d'abaisser de ce point la perpendiculaire KI sur MF : le point I est le centre de courbure demandé.

Dans le cas particulier où C est le centre de courbure de l'ellipse donnée pour le point M, il est sur la perpendiculaire élevée de F à FM et il en résulte que I coïncide avec C; donc : *la conique, tangente en* M *à l'ellipse donnée, qui est tangente en* F *et* F', *aux droites qui vont de ces points au centre de courbure* c *de l'ellipse, a un contact du second ordre avec cette courbe* [1].

Pour terminer, voici une autre construction du point ω. On mène MP parallèlement à F'C, puis PQ parallèlement à CM : La perpendiculaire Qω à MF détermine ω sur MC.

---

(1) *Voir* Koehler, *Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure,* Ire Partie, p. 258.