NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. GÉRARDIN

Contribution à l'étude de l'équation $1.2.3.4\ldots z+1=y^2$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 222-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__222_1>

[I19c]

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION

$$1.2.3.4\ldots z + 1 = y^2;$$

PAR M. A. GÉRARDIN.

Le théorème de Wilson, autrement dit l'équation

$$(p-1)! + 1 = M.p \qquad (p \text{ premier}),$$

a donné l'idée de chercher d'autres relations. C'est ainsi que la factorielle N! des nombres naturels, ou celle P! des nombres premiers, augmentée ou diminuée de l'unité, et devenant parfois un carré ou une somme de divers nombres figurés, s'est présentée fréquemment à l'attention des mathématiciens, qui ont énoncé à leur sujet quelques propositions, pour la plupart empiriques, ou dont la démonstration n'a pas encore abouti, et parmi lesquelles notamment la question proposée, après d'infructueuses recherches, par M. H. Brocard, successivement dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique* (n° 166, 1876, p. 287), les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (n° 1532, 1885, p. 391) et *Mathesis* (n° 597, 1887, p. 280) :

L'équation indéterminée en nombres entiers

$$1.2\ldots z + 1 = y^2$$

n'admet pas d'autres solutions que

$$z = 4,\ 5,\ 7; \qquad y = 5,\ 11,\ 71.$$

Cette question est demeurée sans réponse et, en 1897, M. E. Fauquembergue en a sollicité de nouveau la recherche dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (n° 1264, p. 146).

La difficulté de la question réside en la nature de la factorielle

$$N! = 1.2.3.4\ldots n,$$

qui ne peut se représenter par les symboles de l'Algèbre. C'est pourquoi il ne nous paraît possible de l'étudier que par échelons successifs, ce qui multiplie les hypothèses auxiliaires.

De nombreuses recherches dans la *Théorie des nombres* nous ont montré le rôle particulièrement important de la résolution en nombres entiers de l'équation

$$ax^2 + bx + c = y^2,$$

et la corrélation de ce problème avec celui de l'équation

$$N! + 1 = y^2.$$

Le présent travail est destiné à développer cette idée et montrera, à défaut de certitude décisive, que, s'il existe d'autres solutions que $z = 4, 5, 7$, elles doivent être extrêmement grandes.

L'hypothèse fondamentale, reconnue exacte, est que l'équation

$$z! + 1 = y^2$$

n'a pas de solution entre $z = 7$ et $z = 25$. Nous supposerons donc z au moins égal à 25, ce qui donnera

$$z! + 1 = 10^6 h + 1 = y^2.$$

On est ainsi d'abord amené a rechercher une solution de l'équation

$$10^6 h + 1 = y^2,$$

y ne peut être ici que $10x + 1$ ou $10x + 9$.

1° $y = 10x + 1$. — On aura

$$100x^2 + 20x + 1 = 10^6 h + 1,$$

d'où

$$10x^2 + 2x \ = 10^5 h,$$
$$2x(5x + 1) = 2^5 . 5^5 h.$$

Or $5x + 1$ ne sera jamais $m.5$, d'où

$$x = 5^5 a,$$

et alors

$$2.5^5 a(5^6 a + 1) = 2^5 . 5^5 h$$

ou

$$a(5^6 a + 1) = 2^4 h,$$

ce qui donne

$$a = 16l \qquad \text{ou} \qquad a = 16l + 7.$$

Donc h ne peut avoir que les deux formes

$$250000\,l^2 + l \qquad \text{ou} \qquad 250000\,l^2 + 218751\,l + 47852,$$

ce qui donne pour y

$$500000\,l + 1, \quad 218751.$$

2° $y = 10x + 9$. — Cette hypothèse, développée de la même façon, montrera que y doit être ici de la forme

$$y = 1\,000\,000 f + 781\,249,$$

d'où

$$h = 1\,000\,000 f^2 + 1\,562\,498 f + 610\,350,$$

et enfin

$$y = 1\,000\,000 f + 999\,999,$$

d'où

$$h = 1\,000\,000 f^2 + 217\,998 f + 854\,198.$$

D'autre part, nous savons qu'un carré impair n'est jamais de la forme $6g + 5$; il y aurait donc pour ce problème général *seize* formules.

Mais pour le problème particulier

$$y^2 = 10^6 h + 1 = z! + 1,$$

nous n'aurons que les *quatre* formules précédentes où h sera $6m$.

Il reste à exprimer dans la seconde partie des recherches que chacune des formules est séparément divisible par $2^{16}.3^{10}.7^3.11^2.13.17.19.23$, *au moins*. Ceci donnera toutes les conditions particulières, qui, évidemment, ne seront pas toutes compatibles entre elles.

L'étude de ces nouvelles hypothèses est un peu longue et aride : en conséquence, nous ne la développerons pas ici.

La conclusion de nos premières recherches est que, si la question comporte une autre solution, elle donnera pour y un nombre de 20 à 30 chiffres au moins. Nous serons heureux de voir continuer et développer ces investigations, et espérons les voir aboutir définitivement, après trente années d'attente pour l'auteur de la question.

Il serait peut-être intéressant d'étudier

$$10^8 h + 1 = y^2.$$

Nous avions d'abord essayé d'autres méthodes, mais celle qui vient d'être exposée nous semble préférable [1].