NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Solution de la question de mathématiques spéciales du concours d'agrégation de 1905

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 20-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__20_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHEMATIQUES SPECIALES DU CONCOURS D'AGREGATION DE 1905;

PAR M. A. VACQUANT.

1° *On donne les deux droites* D, D′ *définies respectivement par les équations*

$$(\mathrm{D}) \qquad y = 0, \qquad z = h,$$
$$(\mathrm{D}') \qquad x = 0, \qquad z = -h,$$

les axes de coordonnées ox, oy, oz *étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface* S *lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface.*

2° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque* M *de la surface* S *en fonction de l'abscisse* α *et de l'ordonnée* β *des deux points* N, N′ *où une droite, menée par* M, *rencontre respectivement* D *et* D′. *Soit* P *le point de coordonnées* α, β *dans le plan* xoy. *Lieu du point* M *quand* P *décrit une droite quelconque du plan* xoy. *Étude de l'intersection de la surface* S *avec une quadrique quelconque qui passe par* D *et* D′. *Lieu correspondant du point* P. *Cas où cette intersection se décompose.*

3° *Démontrer que la surface* S *est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques* Q, *dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes* Q_1. *Trouver l'enveloppe des quadriques* Q.

I. Les deux droites D, D' définies respectivement par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad y = 0, \qquad z = h,$$
$$(\mathrm{D'}) \qquad x = 0, \qquad z = -h$$

seront rencontrées par une droite ayant pour équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

si l'on a

$$bh + q = 0, \qquad -ah + p = 0$$

et, par suite,

$$(\mathrm{G}) \qquad x = a(z + h), \qquad y = b(z - h)$$

sont les équations d'une droite G rencontrant D et D' en des points N et N' ayant respectivement pour abscisse et pour ordonnée

$$\alpha = 2ah, \qquad \beta = -2bh.$$

Pour que G reste parallèle au plan

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0,$$

il faut

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C} = 0.$$

Le paraboloïde engendré par G a pour équation

$$\frac{\mathrm{A}x}{z + h} + \frac{\mathrm{B}y}{z - h} + \mathrm{C} = 0$$

ou

$$\mathrm{A}x(z - h) + \mathrm{B}y(z + h) + \mathrm{C}(z - h)(z + h) = 0$$

ou

$$(\varpi)\qquad Cz^2 + Axz + Byz - Ahx + Bhy - Ch^2 = 0.$$

Ce paraboloïde ayant pour plans directeurs

$$z = 0, \qquad Ax + By - Cz = 0,$$

la direction de son axe a pour équations

$$\frac{x}{B} = \frac{y}{-A} = \frac{z}{0}.$$

Le point $M(x, y, z)$ sera le sommet de ϖ si le plan tangent en M est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{A(z-h)}{B} = \frac{B(z+h)}{-A} = \frac{Ax + By + 2Cz}{0}.$$

Les coordonnées du sommet M de ϖ sont donc définies par les équations

$$A^2(z-h) + B^2(z+h) = 0, \qquad Ax + By - 2Cz = 0,$$
$$Ax(z-h) + By(z+h) - C(z-h)(z+h) = 0.$$

En éliminant C entre les deux dernières équations, on obtient l'équation

$$Ax(z-h)(z+h-2z) + By(z+h)(z-h-2z) = 0$$

ou

$$Ax(z-h)^2 + By(z+h)^2 = 0.$$

En éliminant A et B entre cette équation et la première des trois précédentes on a l'équation ponctuelle du lieu de M :

$$y^2(z+h)^4(z-h) - x^2(z-h)^4(z+h) = 0.$$

Après suppression du facteur $(z-h)(z+h)$ qui donne l'ensemble des deux plans parallèles à xoy

menés par D et D', on obtient une surface S ayant pour équation ponctuelle

$$(\mathrm{S}) \qquad y^2(z+h)^3+x^2(z-h)^3=0$$

ou

$$x^2(h-z)^3=y^2(h+z)^3,$$

c'est-à-dire une surface réglée du cinquième ordre ayant pour génératrice la droite

$$y=\lambda x, \qquad h-z=\lambda^{\frac{2}{3}}(h+z),$$

parallèle au plan xoy et s'appuyant sur l'axe des z qui est une ligne double de la surface. Tout plan passant par zz' coupe S suivant zz' et trois autres droites parallèles à xoy dont une seulement est réelle. La surface S est donc un conoïde ayant pour axe zz', pour plan directeur xoy.

Les coordonnées homogènes u, v, w, r d'un plan tangent à S au point (x, y, z) sont

$$\begin{aligned}
u &= 2x(z-h)^3,\\
v &= 2y(z+h)^3,\\
w &= 3y^2(z+h)^2+3x^2(z-h)^2,\\
r &= 3hy^2(z+h)^2-3hx^2(z-h)^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u}{v}=\frac{x(z-h)^3}{y(z+h)^3}=\frac{-y}{x},$$

$$\frac{w}{r}=\frac{(z-h)^3(z+h)^2-(z+h)^3(z-h)^2}{h[(z-h)^3(z+h)^2+(z+h)^3(z-h)^2]}=\frac{z-h-(z+h)}{h(z-h+z+h)}$$

ou

$$\frac{w}{r}=-\frac{1}{z}.$$

En portant les valeurs de $\frac{y}{x}$ et de z dans (S) on obtient l'équation tangentielle de la surface S

$$(1)\qquad u^2\left(\frac{-r}{w}+h\right)^3+v^2\left(-\frac{r}{w}-h\right)^3$$

ou

$$(S_1)\qquad u^2(hw-r)^3-v^2(hw+r)^3=0.$$

II. Les équations (G) peuvent s'écrire

$$x=\frac{\alpha}{2h}(z+h),\qquad y=-\frac{\beta}{2h}(z-h)$$

Ces équations, jointes à l'équation ponctuelle de S, savoir

$$x^2(z-h)^3+y^2(z+h)^3=0,$$

donnent les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de la surface S en fonction de deux paramètres α et β. L'élimination de x et y donne l'équation

$$\alpha^2(z-h)+\beta^2(z+h)=0.$$

D'où

$$\frac{z-h}{-\beta^2}=\frac{z+h}{\alpha^2}=\frac{2z}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2h}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Par suite les coordonnées du point M sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2},\\ y&=\frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2},\\ z&=\frac{h(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}\end{aligned}\right.$$

Supposons que le point $P(\alpha, \beta, o)$ décrive une droite Δ ayant pour équations

$$(\Delta)\qquad z=0,\qquad ax+by+c=0.$$

on aura

$$(3) \qquad a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Le lieu de M est une courbe définie paramétriquement par les équations (2) et (3), c'est-à-dire une cubique gauche Γ. On obtiendra les équations ponctuelles de cette cubique en éliminant α et β entre (2) et (3), ou encore entre les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} &&= 1,\\
&\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} &&= \frac{z}{h},\\
&\alpha x - \beta y &&= \alpha^2 - \beta^2,\\
&a\alpha + b\beta + c = 0.
\end{aligned}$$

Des deux premières on tire α et β

$$\frac{2x}{\alpha} = 1 + \frac{z}{h}, \qquad \frac{2y}{\beta} = 1 - \frac{z}{h},$$

$$\alpha = \frac{2hx}{h+z}, \qquad \beta = \frac{2hy}{h-z}.$$

En portant dans les deux dernières on obtient l'équation de S, comme cela était à prévoir, et l'équation d'un paraboloïde ϖ_1 passant par D et D'; de sorte que la ligne lieu de M quand P décrit Δ est définie par les équations

$$(\mathrm{S}) \qquad x^2(z-h)^3 + y^2(z+h)^3 = 0,$$

$$(\varpi_1) \quad 2ahx(h-z) + 2bhy(h+z) + c(h-z)(h+z) = 0.$$

L'intersection de la surface S et du paraboloïde ϖ_1 qui est du dixième degré se compose de D et D', droites doubles de S, de la droite de l'infini $t = 0$, $z = 0$ comptée trois fois et de la cubique Γ.

L'équation (ϖ_1) étant linéaire et homogène par rapport aux trois paramètres a, b, c, on peut dire que cette équation peut représenter un paraboloïde quelconque passant par D et D′; alors le calcul précédent montre que l'intersection de la surface S et d'un paraboloïde quelconque passant par D et D′ se compose des droites D, D′ comptées deux fois, de la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois et d'une cubique gauche.

Étudions maintenant l'intersection de S avec une quadrique quelconque H passant par D et D′. L'équation de H est de la forme

$$(\mathrm{H})\qquad \mathrm{A}x(z-h)+\mathrm{B}y(z+h)+\mathrm{C}(z-h)(z+h)+\mathrm{D}xy=0.$$

Pour tout point commun (x, y, z) à H et à S les paramètres α et β seront liés par une relation obtenue en remplaçant dans l'équation (H) les coordonnées x, y, z par leurs valeurs (2). En remarquant que

$$z-h=\frac{-2h\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\qquad z+h=\frac{2h\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

cette relation est

$$-2\mathrm{A}h\alpha^3\beta^2+2\mathrm{B}h\beta^3\alpha^2-4\mathrm{C}h^2\alpha^2\beta^2+\mathrm{D}\alpha^3\beta^3=0.$$

Elle se décompose en deux :

$$(4)\qquad \alpha^2\beta^2=0,$$

$$(5)\qquad \mathrm{D}\alpha\beta-2\mathrm{A}h\alpha+2\mathrm{B}h\beta-4\mathrm{C}h^2=0.$$

La première donne sur S les droites D et D′ comptées deux fois, car pour $\alpha=0$ ou $\beta=0$ on a respectivement

$$x=0,\qquad y=\beta,\qquad z=-h\qquad \text{(droite D')},$$

$$y=0,\qquad x=\alpha,\qquad z=h\qquad \text{(droite D)}.$$

Le lieu correspondant du point $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ dans le plan xoy est l'axe oy ou l'axe ox.

L'équation (5), qui est une relation homographique entre α et β, définit sur S une courbe du sixième degré C_6. Le lieu correspondant de P dans le plan xoy, défini par l'équation (5), est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes ox, oy.

Si D n'est pas nul, c'est-à-dire si H n'est pas un paraboloïde, de (5) on déduit

$$\beta = \frac{2h(A\alpha + 2Ch)}{D\alpha + 2Bh},$$

et d'après les formules (2) on obtiendrait aisément les coordonnées d'un point de C_6 en fonction du seul paramètre α.

La courbe C_6 se décompose quand la relation (5) se décompose; alors (5) prend la forme

$$(m\alpha + n)(m'\beta + n') = 0,$$

ce qui a lieu, comme on le voit sur l'expression précédente de β, quand on a

$$\frac{A}{D} = \frac{C}{B}.$$

L'hyperbole (5) se réduit à deux droites respectivement parallèles à ox, oy et la courbe C_6 se décompose en deux cubiques planes; car, si l'on appelle λ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$A = D\lambda, \qquad C = B\lambda,$$

et l'équation (H) devient

$$[y + \lambda(z - h)][Dx + B(z + h)] = 0,$$

c'est-à-dire que la quadrique H se réduit à deux plans passant respectivement par D, D' et déterminant dans S deux cubiques.

Si $D = 0$, la quadrique H est un paraboloïde, et l'on retrouve les résultats indiqués plus haut : la courbe C_6 est remplacée par une cubique gauche Γ et la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois ; l'hyperbole (5) est remplacée par une droite quelconque du plan xoy. La cubique Γ devient plane si $A = 0$ ou $B = 0$, auquel cas le paraboloïde se décompose en un plan parallèle à xoy passant par l'une des droites D, D' et un autre plan passant par l'autre droite. Le lieu de P est une droite parallèle à ox ou oy.

III. Les équations ponctuelle et tangentielle de S sont, en coordonnées homogènes,

$$(S) \qquad x^2(z - ht)^3 + y^2(z + ht)^3 = 0,$$

$$(S_1) \qquad u^2(hw - r)^3 - v^2(hw + r)^3 = 0.$$

Soit une quadrique Q ayant pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Les coordonnées homogènes du plan polaire d'un point (x, y, z, t) de S par rapport à Q sont

$$u = f'_x, \qquad v = f'_y, \qquad w = f'_z, \qquad r = f'_t ;$$

en remplaçant u, v, w, r par ces valeurs dans (S_1), on doit obtenir l'équation ponctuelle de S. En identifiant l'équation obtenue avec l'équation (S) on voit aisément que, si la quadrique Q existe, son équation ne peut être que de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2C''z + D = 0.$$

c'est-à-dire que Q est une quadrique ayant pour plans de symétrie rectangulaires yoz et zox, pour axe de symétrie oz. D'ailleurs ce résultat est à peu près évident en remarquant que la surface S possède cette symétrie.

On a alors

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}f'_x = Ax, \\ v &= \tfrac{1}{2}f'_y = A'y, \\ w &= \tfrac{1}{2}f'_z = A''z + C'', \\ r &= \tfrac{1}{2}f'_t = C''z + D. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (S_1), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &A^2x^2[z(A''h - C'') + C''h - D]^3 \\ &\quad - A'^2y^2[z(A''h + C'') + C''h + D]^3 = 0. \end{aligned}$$

En identifiant avec (S), qu'on écrit

$$x^2(h - z)^3 - y^2(h + z)^3 = 0,$$

on a les relations

$$\begin{aligned} A^{\frac{2}{3}}(C'' - A''h) &= \frac{A^{\frac{2}{3}}(C''h - D)}{h} \\ &= A'^{\frac{2}{3}}(A''h + C'') = \frac{A'^{\frac{2}{3}}(C''h + D)}{h}, \end{aligned}$$

qui se réduisent aux deux suivantes

$$D = A''h^2,$$

$$C''\left(A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}}\right) = A''h\left(A^{\frac{2}{3}} + A'^{\frac{2}{3}}\right).$$

Les deux coefficients A et A' sont différents de zéro; quant à A'' il peut être nul ou non.

Si $A'' = 0$, on a

$$D = 0,$$

et, comme C'' est différent de zéro, sans quoi la quadrique Q se réduirait à deux plans, on aura

$$A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} A^2 &= A'^2, \\ A &= \pm A'. \end{aligned}$$

Les quadriques Q ont, dans ce cas, pour équation générale,

$$A(x^2 \pm y^2) + 2C'' z = 0$$

ou

$$x^2 \pm y^2 + 2pz = 0,$$

c'est-à-dire sont des paraboloïdes Q_1 de révolution ou équilatères.

Si A″ n'est pas nul, D est différent de zéro ainsi que C″, A et A′. Nous poserons

$$A^{\frac{1}{3}} = a, \qquad A'^{\frac{1}{3}} = a' :$$

par suite

$$A = a^3, \qquad A' = a'^3, \qquad C'' = A'' h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}.$$

L'équation générale des quadriques Q est

$$a^3 x^2 + a'^3 y^2 + A'' z^2 + 2A'' h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + A'' h^2 = 0.$$

Comme A″ est différent de zéro, on peut supposer A″ = 1, et l'équation précédente s'écrit

$$f(x, y, z) = a^3 x^2 + a'^3 y^2 + z^2 + 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + h^2 = 0.$$

On obtient l'enveloppe de ces quadriques Q en éliminant a, a' entre l'équation précédente et les suivantes

$$f'_a = 0, \qquad f'_{a'} = 0$$

ou

$$3a^2 x^2 + 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a - (a^2 + a'^2)2a}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$3a'^2 y^2 + 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a' + (a^2 + a'^2)2a'}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$3ax^2 - 8hz \frac{a'^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$3a' y^2 + 8hz \frac{a^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0.$$

De ces deux dernières équations on déduit, en éliminant z,

$$a^3 x^2 + a'^3 y^2 = 0,$$

et, d'après l'équation $f(x, y, z) = 0$, on aura

$$z^2 + 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + h^2 = 0$$

ou

$$\frac{z^2 + h^2}{2hz} = \frac{a'^2 + a^2}{a'^2 - a^2}.$$

D'où

$$\frac{(z - h)^2}{(z + h)^2} = \frac{2a^2}{2a'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{a'} = \pm \frac{z - h}{z + h}.$$

Remplaçant $\frac{a}{a'}$ par l'une ou l'autre de ces valeurs dans l'équation

$$a^3 x^2 + a'^3 y^2 = 0,$$

on obtient pour enveloppe des quadriques Q les deux surfaces

$$x^2 (z - h)^3 \pm y^2 (z + h)^3 = 0,$$

dont l'une est la surface S.