Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 185-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__185_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons d'Algèbre et d'Analyse à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales; par M. *J. Tannery*. — 2 vol. grand in-8° de 423 et 636 pages. Paris, Gauthier-Villars.

I. L'enseignement scientifique de nos Lycées n'est pas seulement une préparation technique; il n'a pas non plus la préoccupation unique d'élever de futurs savants : tout le monde est d'accord là-dessus. Mais quelles qualités cet enseignement doit-il développer dans les jeunes esprits et par quelles méthodes? Dans ses *Leçons d'Algèbre et d'Analyse,* M. Tannery apporte une réponse à ces questions.

Sa méthode est de tout dire. Cela soulève des objections. Celle-ci d'abord : la méthode est dangereuse, elle fera des raisonneurs. Mais ce qui est dangereux ce n'est pas de raisonner, c'est de raisonner mal et il est dangereux aussi que, dans un pays libre, trop de personnes aient des préventions contre l'usage de la raison. Autre objection, d'un caractère plus pratique : on n'aura pas le temps de donner, dans les Cours, toutes ces explications et d'ailleurs il vaut mieux, dans une Leçon orale, faire bien comprendre l'idée essentielle que passer en revue toutes les difficultés. Mais le maître a dû réfléchir à plus de choses qu'il n'en peut enseigner et puis, à côté du Cours, il y a les Conférences et surtout il y a les Livres auxquels on pourra, de plus en plus maintenant, renvoyer les meilleurs élèves.

Voilà, il me semble, le grand service que va rendre le nouveau Livre de M. Tannery : il engagera les jeunes professeurs à réfléchir sur leur enseignement; il aidera les bons élèves à compléter ce qu'ils viennent d'apprendre, à goûter la joie de voir clair et d'être sûrs, à acquérir, par de longs et consciencieux efforts, une raison plus ferme et une intelligence plus vigoureuse. Ce n'est pas, du reste, un Livre de pure théorie. Les règles y sont préparées et énoncées de façon à prévenir toute confusion dans les applications et à conduire jusqu'aux calculs numériques; des discussions minutieuses, des exemples traités avec détails montrent comment on peut, dans la pratique, obtenir une approximation donnée ou compter les décimales exactes.

Il serait trop long de signaler tout ce que l'auteur a apporté de personnel dans un Cours qu'il a évidemment *repensé* tout entier. J'essaierai seulement d'indiquer dans quelles limites il me paraît avoir voulu se maintenir et quelle part il a faite à la pratique et, pour cela, je considérerai d'abord les questions d'Analyse, en prenant mes exemples dans les Chapitres consacrés aux nombres irrationnels, aux séries et aux intégrales définies.

II. La définition d'un nombre irrationnel est rattachée à la notion de *coupure*. Il n'y a pas de difficulté à donner cette notion, en se servant d'exemples simples, ni à introduire les valeurs approchées, avec une approximation donnée, d'un nombre défini à l'aide d'une coupure. Ce qui demande plus d'efforts aux élèves, c'est de comprendre le sens des calculs faits sur les symboles représentant des nombres irrationnels, calculs abrégés qui se rapportent, en définitive, à des valeurs approchées de ces nombres et qui rejettent à la fin les discussions relatives à l'approximation. L'exposé systématique des définitions et des opérations sur les nombres irrationnels est fait avec rigueur, mais avec l'aide de tout ce qui peut soulager l'attention : représentation par un point sur une droite, représentation décimale.... Le calcul des radicaux, l'introduction des exposants fractionnaires ou irrationnels, les définitions des arcs et des aires montrent déjà l'utilité des conceptions qui viennent d'être expliquées. Cette utilité apparaîtra plus clairement quand on abordera l'étude des séries et des fonctions d'une variable réelle.

Dans le Chapitre sur les séries, l'auteur s'est visiblement attaché à employer les démonstrations les plus élémentaires; ainsi la condition de convergence de Cauchy est indiquée seulement dans un passage imprimé en petits caractères. Mais on donne une démonstration rigoureuse de ce fait qu'une quantité qui va constamment en croissant et reste inférieure à une quantité fixe tend vers une limite. Cette démonstration n'est pas autre chose, au fond, qu'une analyse de ce qui est admis dans le raisonnement géométrique exposé ordinairement à ce sujet; on le verrait encore mieux si l'auteur ne s'était pas interdit de parler de la limite supérieure d'un ensemble. La fin du Chapitre sur les séries est consacrée au problème : *Calculer, avec une approximation donnée, la somme d'une série dont on sait calculer chaque terme avec telle approximation que l'on veut;* l'application est faite en détail à deux exemples numériques.

On lira avec un vif intérêt tout le Chapitre sur les séries de fonctions. Le rayon de convergence d'une série entière en x est déterminé, dans le cas simple où tout est positif, par un raisonnement qui revient à considérer la limite supérieure des valeurs de x qui rendent la série convergente. La continuité d'une série entière est rattachée à la même question pour une série de fonctions continues de x dont les termes sont inférieurs, en valeur absolue, aux termes, tous positifs et fixes, d'une série convergente. Ceci permet de trouver la dérivée d'une fonction $f(x)$ définie par une série entière en cherchant directement la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, où l'on fait tendre h vers zéro. L'analogie des propriétés entières avec celles des polynomes entiers est ainsi bien mise en évidence. Les développements des fonctions $e^x, (1+x)^m, \log(1+x)$

sont obtenus directement. On explique, en grand détail, l'emploi des développements limités avec un terme complémentaire et l'on en fait l'application aux fonctions rationnelles et aux fonctions implicites.

A propos de l'intégrale définie, je montrerai seulement comment M. Tannery considère l'aire d'une courbe fermée. La notion d'aire a été introduite, dès le premier Chapitre, à propos du cercle, en considérant un polygone (p) limité par une ligne fermée dont tous les points sont intérieurs au cercle ou sur la circonférence, puis un polygone (p') limité par une ligne fermée ayant tous ses points extérieurs au cercle ou situés sur sa circonférence; l'aire p du premier est plus petite que l'aire p' du second; d'autre part, on voit aisément que, parmi les polygones intérieurs à la courbe et les polygones extérieurs, il y en a dont les aires diffèrent aussi peu qu'on veut. L'aire du cercle peut être définie comme un nombre plus grand que l'aire de n'importe quel polygone (p), plus petit que l'aire de n'importe quel polygone (p'). Pour étendre cette définition au cas d'une courbe fermée quelconque, on considère l'aire limitée par une courbe

$$y = f(x),$$

l'axe des x et les ordonnées correspondant aux abscisses a et b $(a < b)$ en supposant d'abord que la fonction $f(x)$ soit positive et croissante; on prend pour polygone (p) la somme des rectangles intérieurs et pour polygone (p') la somme des rectangles extérieurs qui correspondent à une division de l'intervalle (ab) en intervalles partiels; la différence $p' - p$ des aires de ces polygones tend vers zéro quand tous les intervalles partiels tendent vers zéro. On peut alors répéter les raisonnements faits à propos du cercle et regarder comme définie l'aire du trapèze curviligne considéré : p est une valeur approchée par défaut, p' une valeur approchée par excès de cette aire.

Le paragraphe consacré à l'évaluation approchée d'une intégrale définie contient une discussion intéressante de la méthode de Simpson et conduit de la façon la plus naturelle à des formules qui pourraient être rattachées à la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. La méthode de Simpson convenablement appliquée à l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ donne pour l'intégrale la valeur 0,7853983 dont la différence avec la valeur exacte est moindre que 2×10^{-7}. On considère encore l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, on évalue une limite de l'erreur commise en la remplaçant par $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ et l'on calcule cette dernière intégrale avec quatre décimales exactes.

Je m'en tiendrai à ces exemples pris dans les questions les plus abstraites du programme d'Analyse; on verra que les calculs d'intégrales, les applications aux arcs, aux volumes, aux moments d'inertie, les équations différentielles linéaires ont été traités avec grand soin, le point de vue restant celui du nouveau programme de Mathématiques spéciales.

III. La partie algébrique de ces *Leçons* apporte des éclaircissements et des précisions sur bien des points au sujet desquels il serait certainement plus facile et plus rapide de s'en tenir aux généralités. Par exemple tout ce qui se rapporte aux fonctions symétriques, aux racines infinies des équations algébriques, aux solutions communes à deux équations algébriques renouvelle l'enseignement de ces questions importantes.

A propos des fonctions symétriques, l'auteur insiste sur la distinction à faire entre les fonctions symétriques de n variables et les fonctions symétriques des n racines d'une équation algébrique ($x_1^2 - x_2 x_3$ est une fonction symétrique des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$).

Je ferai, en passant, une remarque que je tiens d'ailleurs de M. Tannery sur la question suivante : *Montrer que le calcul d'une fonction rationnelle et symétrique*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

des racines d'une équation algébrique de degré n se ramène au calcul d'un ou de deux polynomes entiers et symétriques de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La proposition s'établit pour une fonction entière en prenant la moyenne

$$\frac{1}{\nu}(F_1 + F_2 + \ldots + F_\nu)$$

des valeurs que prend la fonction quand on effectue sur x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ les $\nu = 1.2\ldots n$ permutations possibles. L'extension à une fonction rationnelle $\frac{g}{h}$ est immédiate si l'on considère le rapport

$$\frac{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu}{h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu}$$

et si l'on écarte le cas singulier où l'on aurait

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu = 0.$$

Pour éviter d'avoir à faire cette restriction, il suffit d'opérer comme on l'a fait pour les fonctions entières et de considérer la somme

$$\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \ldots + \frac{g_\nu}{h_\nu} = \frac{g_1 h_2 \ldots h_\nu + g_2 h_1 \ldots h_\nu + \ldots}{h_1 h_2 \ldots h_\nu}:$$

cette somme étant mise sous forme de fraction, son dénominateur et par suite son numérateur sont des fonctions symétriques des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Quand on veut calculer une fonction symétrique entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on peut passer par l'intermédiaire des sommes de puissances semblables. Mais cette méthode n'est pas toujours la plus commode. On expose ici la méthode de Waring qui, outre ses avantages pratiques, met en évidence des propriétés du polynome $F(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ auquel se ramène la fonction donnée $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et l'on montre sur des exemples comment on peut profiter de simplifications qui résultent des valeurs numériques des coefficients.

L'examen des cas particuliers et de la façon dont il faut entendre le théorème : *Deux équations des degrés respectifs n, p ont np solutions* est, dit l'auteur, en dehors du cadre de ces *Leçons*. Mais, dans les passages imprimés en petits caractères, il donne à ce sujet des indications très instructives. Les degrés de deux polynomes entiers en x dont les coefficients sont des fonctions entières de y peuvent s'abaisser tous les deux pour une valeur particulière de y; on dira que ces deux polynomes ont un diviseur commun de degré *rectifié* $\gamma + r$ si γ est le plus petit des deux nombres qui marquent l'abaissement du degré et si, en outre, les deux polynomes ont un diviseur de degré *vrai* égal à r. Ceci permet de présenter avec précision ce qui se rapporte aux points à l'infini communs à deux courbes algébriques. Quant à définir une solution multiple de deux équations

$$f(x,y)=0, \qquad g(x,y)=0,$$

on montre qu'on y peut parvenir par une méthode qui revient à former l'équation tangentielle des points communs aux deux courbes correspondantes.

Je voudrais parler encore des 400 Exercices proposés à la fin des Chapitres auxquels ils se rapportent. Mais il faut terminer une Note déjà bien longue. C'est en lisant avec soin les deux Volumes de cet Ouvrage qu'on reconnaîtra tous les services qu'il peut rendre aux élèves et à l'Enseignement.

E. LACOUR.