NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JACQUES-JEAN CHAPELON

Sur la surface lieu des centres de courbure des courbes d'une surface passant par un point de cette surface

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 180-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__180_0>

[O5d, M²3a]

SUR LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE DES COURBES D'UNE SURFACE PASSANT PAR UN POINT DE CETTE SURFACE;

PAR M. JACQUES-JEAN CHAPELON,
Élève à l'École Polytechnique.

D'après le théorème de Meusnier, si l'on considère les courbes d'une surface Σ, passant par un point A de cette surface et tangentes à une tangente D à la surface au point A, le lieu de leurs centres de courbure est une circonférence, tangente en A à la surface et située dans un plan perpendiculaire à la droite D, de sorte que, lorsqu'on fait varier la droite D dans le plan tangent, le lieu des centres de courbure des courbes de la surface Σ passant en A est une surface S engendrée par des cercles.

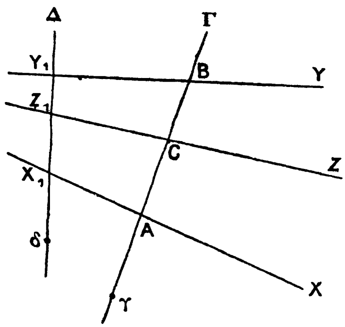
Le but de cette Note est de faire connaître la propriété suivante de cette surface :

La transformée par inversion de S *par rapport au point* A *pris comme pôle est un conoïde de Plücker.*

Le *conoïde de Plücker,* que l'on appelle souvent aussi *cylindroïde,* peut être engendré de la manière suivante :

Considérons deux droites X, Y, rectangulaires, et leur perpendiculaire commune Δ (*fig.* 1). Par Δ, faisons passer un plan quelconque P que l'on prendra comme plan directeur d'un paraboloïde passant par X et Y. Ce paraboloïde ayant évidemment ses deux plans directeurs rectangulaires est isoscèle, et l'une des génératrices Z, de même système que X et Y, est perpendiculaire au plan P. Lorsque ce plan P varie, le lieu

Fig. 1.

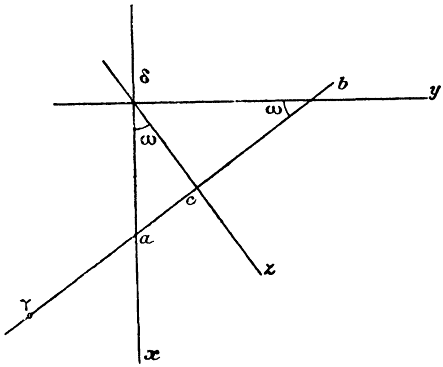


de Z est un conoïde de Plücker. Remarquons en passant que X et Y appartiennent au conoïde : il suffit pour le voir de prendre le plan P perpendiculaire à X, puis à Y; remarquons encore que la droite Z, étant perpendiculaire à toutes les génératrices du système Δ, est ligne de striction du paraboloïde Π, de sorte que l'on peut encore définir le conoïde de Plücker comme étant le lieu des lignes de striction des paraboloïdes isoscèles passant par deux droites rectangulaires.

Nous allons maintenant faire connaître une propriété du conoïde de Plücker le caractérisant et pouvant, par suite, lui servir de nouvelle définition :

Soit Γ une génératrice du paraboloïde Π, de même système que Δ; je considère la projection orthogonale de toute la figure sur un plan perpendiculaire à Δ en un point quelconque δ (*fig.* 2). On obtient ainsi trois droites x, y, z passant par δ et une droite γacb perpendiculaire à z. D'ailleurs

Fig. 2.



$$\frac{\delta X_1}{\gamma A} = \frac{\delta Z_1}{\gamma C} = \frac{\delta Y_1}{\gamma B},$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma a} = \frac{\gamma C}{\gamma c} = \frac{\gamma B}{\gamma b},$$

d'où

(1) $$\frac{\delta X_1}{\gamma a} = \frac{\delta Z_1}{\gamma c} = \frac{\delta Y_1}{\gamma b},$$

puis

$$\gamma c = \gamma a + ac;$$

mais

$$ac = a\delta \sin\omega, \qquad a\delta = ab \sin\omega,$$

d'où

$$\begin{aligned}\gamma c &= \gamma a + ab \sin^2\omega \\ &= \gamma a + (\gamma b - \gamma a)\sin^2\omega = \gamma a \cos^2\omega + \gamma b \sin^2\omega,\end{aligned}$$

donc, à cause des rapports (1),

$$\delta Z_1 = \delta X_1 \cos^2\omega + \delta Y_1 \sin^2\omega.$$

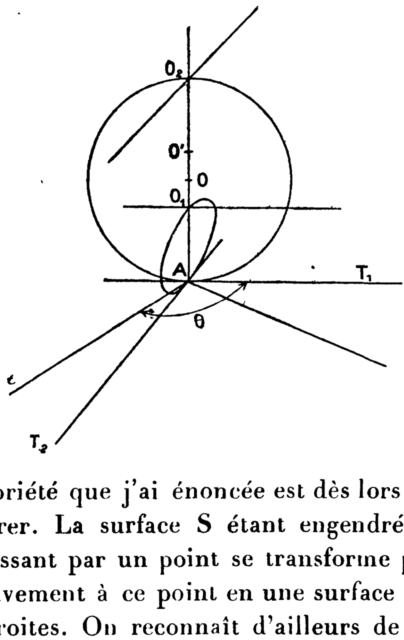
Réciproquement, *soient* X, Y *deux droites rectangulaires,* δ *un point de leur perpendiculaire com-*

mune, Q *un plan passant par* Δ *et faisant l'angle* ω *avec* **X**, *si l'on construit dans ce plan une droite* Z *perpendiculaire à* Δ *et coupant* Δ *en un point* Z_1 *tel que*

$$\delta Z_1 = \delta X_1 \cos^2\omega + \delta Y_1 \sin^2\omega,$$

le lieu de Z *quand* Q *varie est un conoïde de Plücker.* Cela est évident.

Fig. 3.



La propriété que j'ai énoncée est dès lors très facile à démontrer. La surface S étant engendrée par des cercles passant par un point se transforme par inversion relativement à ce point en une surface engendrée par des droites. On reconnaît d'ailleurs de suite que toutes ces droites rencontrent la normale à la surface et sont parallèles au plan tangent en A. Prenons pour puissance d'inversion le produit $R_1 R_2$ des rayons de courbure principaux de la surface au point A, et soient O_1, O_2 les centres de courbure principaux. Les cercles de la surface S, correspondant aux sections principales T_1AN et T_2AN (*fig.* 3) sont respectivement les cercles de diamètres $AO_1 = R_1$ et $AO_2 = R_2$, situés dans les plans T_2AN et T_1AN. Le cercle AO_1 se transforme en une parallèle à AT_2 menée par O_2, le cercle AO_2 en une parallèle à AT_1 menée par O_1. Si l'on considère maintenant une tangente At faisant l'angle θ avec AT_2, d'après la relation d'Euler, le rayon de courbure $AO = R$ de la section normale correspondante est donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}.$$

Le cercle correspondant se transforme en une droite passant par O' et menée dans un plan perpendiculaire à At. On aura

$$AO'.AO = R_1R_2,$$

d'où

$$AO' = R_1\cos^2\theta + R_2\sin^2\theta,$$

d'ailleurs l'angle du plan du cercle avec le plan T_1AN est

$$\omega = \theta - \frac{\pi}{2},$$

de sorte que

$$AO' = AO_1\sin^2\omega + AO_2\cos^2\omega.$$

Donc, d'après ma définition du conoïde de Plücker, le lieu de la droite figure inverse du cercle de diamètre AO est un conoïde de Plücker, ce qui démontre le théorème énoncé.

Bien entendu, en prenant une autre puissance d'inversion, on obtiendrait un autre conoïde homothétique du précédent, mais le conoïde de Plücker que nous avons obtenu est particulièrement intéressant, nous allons voir pourquoi.

Considérons les tangentes asymptotiques à la surface Σ au point A. Ces droites appartiennent évidemment à la surface S, mais elles se transforment visiblement par inversion en elles-mêmes. Considérons maintenant toutes les surfaces parallèles à Σ : en prenant une puissance d'inversion convenable (le produit $R_1 R_2$ relatif à chaque surface), toutes les surfaces S se transforment en le même conoïde de Plücker, car toutes les surfaces parallèles ont mêmes centres de courbure principaux et mêmes plans de sections principales. Il en résulte le théorème suivant, d'ailleurs déjà connu :

Le lieu des tangentes asymptotiques à une famille de surfaces parallèles, le long d'une normale à ces surfaces, est un conoïde de Plücker.