NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. JUHEL-RÉNOY

Sur la projection centrale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 124-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__124_1>

[$L^1 1e$]

SUR LA PROJECTION CENTRALE;

PAR J. M. JUHEL-RÉNOY.

Dans son excellent Ouvrage : *A Treatise on the analytical Geometry* (Dublin, 1885), M. John Casey expose, en ces termes (*Theory of projection*, Sect. V, p. 271), la théorie analytique de la projection centrale.

« Soient O l'origine, OX, OY les axes; BB' et II' deux droites parallèles à l'axe des y et rencontrant l'axe OX en B et I (appelées respectivement *droite de base* et *droite de l'infini*). Soit P un point quelconque du plan; joignons IP coupant BB' en C; par C, menons CP' parallèle à OX, rencontrant OP en P'. Le point P' est appelé la *projection du point* P. »

M. Casey, faisant ensuite ressortir les avantages de cette méthode, entre autres de débarrasser le lecteur d'avoir à considérer différents plans et d'admettre l'usage de l'analyse, montre que les propriétés auxquelles elle conduit sont précisément celles de la perspective.

On voit, en particulier, que si une droite CD coupe la droite de base et la droite II' aux points C et D respectivement, sa projection passe par C et est parallèle à OD, et que si l'on mène la parallèle KK' à BB', telle que $\overline{BK} = -\overline{OI}$, KK' est la ligne de fuite du plan que l'on projette.

Le but de cette Note est de faire l'application géométrique de la méthode à l'étude des propriétés fondamentales des coniques, propriétés focales et intersection avec une droite, et en particulier, en ce qui concerne l'hyperbole, démonstration du théorème capital de la constance aréolaire du triangle déterminé par les deux asymptotes et une tangente quelconque, non sans avoir montré, au préalable, comment la définition de M. Casey se rattache à celle des figures homologiques, l'origine étant le centre d'homologie, et la base, l'axe d'homologie.

En effet, menons par P la ligne QR égale et parallèle à BI; nous aurons, μ étant le point de rencontre de OP et de BB',

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{IP}{IC} = \frac{PR}{BI} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{QP}{CP'}.$$

Or

$$\frac{QP}{PR} = \frac{PC}{IP} = \frac{CP'}{OI}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{QP}{CP'} = \frac{PR}{OI}$$

et, par suite,

$$(O\mu PP') = \frac{OP}{OP'} : \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{OI}{BI}.$$

Le rapport anharmonique des quatre points $O\mu PP'$ est donc constant et, par suite, les points P et P′ décrivent deux lignes homologiques, ce qui justifie la définition de perspective donnée par M. Casey. On sait, en effet, que, quand deux figures sont homologiques, il suffit de faire tourner le plan de l'une d'elles d'un angle quelconque autour de l'axe d'homologie pour que les deux figures soient en perspective.

On voit d'ailleurs que la construction dont nous nous occupons n'est autre que celle qui donne l'homologue P′ d'un point P, connaissant le point I dont l'homologue est à l'infini sur OX. Elle se déduit, en outre, immédiatement de la construction de la Hire (*Aperçu historique,* p. 128); car il est évident que les deux droites OR et QP′ sont parallèles, les points Q et R étant respectivement sur les droites BB′ et II′.

I. Théorème. — *Tout cercle peut se projeter suivant une courbe telle que le rapport des distances d'un quelconque de ses points à un point fixe et à une droite fixe soit constant.*

C'est un théorème bien connu de la théorie des figures homologiques. Sa démonstration se fait en prenant pour origine le centre F du cercle et pour droite de base la tangente en B à la circonférence. On en conclut que, m étant la projection de M, on a

$$\frac{mF}{mP'} = \frac{BF}{BK} = \text{const.} \qquad \text{avec} \qquad \overline{BK} = -\overline{FI},$$

mP' étant la distance de m à la ligne de fuite KK'. Le point F est le foyer, et la ligne de fuite la directrice.

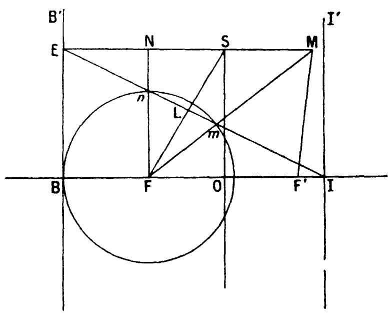
Proposons-nous de construire la tangente à la conique en m; soit T le point d'intersection de la ligne de fuite et de la parallèle menée par F à la tangente au cercle en M; les perspectives de deux droites parallèles se coupant sur la ligne de fuite KK', mT est la tangente en m; on voit que $\widehat{mFT}$ est droit.

Théorème inverse. — *On peut projeter une conique suivant un cercle.*

Il suffit de prendre pour origine le foyer F de la conique et, pour droite II' ou droite limite, la directrice correspondante.

Théorème. — *La projection d'un cercle qui n'est pas tangent à la droite* II' *est une courbe telle que la somme ou la différence des distances de l'un quelconque de ses points à deux pointe fixes (foyers) est constante* (*fig.* 1).

Fig. 1.



En effet, prenons pour origine le centre F, la droite II' ne rencontrant pas le cercle, et pour base BB' la tangente au cercle parallèle à II'. Soient m, n, E les points d'intersection avec la circonférence et avec la base d'une sécante passant par I, qui se projette suivant une parallèle à FI passant par E et rencontrant la courbe de projection en deux points M et N, respectivement situés sur Fm et Fn.

Si L désigne le point de rencontre de mn avec la polaire de I, on a

$$\mathrm{F}(mn\mathrm{IL}) = -1.$$

Donc FL coupe MN en son milieu S. Or

$$\frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{FL}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IL}} = \text{const.}$$

Le lieu de S est donc une perpendiculaire à FI rencontrant cette droite en un point fixe O; c'est un axe de symétrie pour le lieu des points M et N.

On a d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{MF}}{m\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{I}m} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{NF}}{n\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{I}n},$$

d'où, par addition,

$$\frac{\mathrm{MF} + \mathrm{NF}}{m\mathrm{F}} = \mathrm{IE}\left(\frac{1}{\mathrm{I}m} + \frac{1}{\mathrm{I}n}\right) = 2\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IL}}$$

et, par suite,

$$\mathrm{MF} + \mathrm{NF} = \text{const.}$$

Or, par raison de symétrie, NF est égale à la distance du point M au symétrique F' de F par rapport à O; on a donc

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = \text{const.},$$

ce qui démontre la proposition.

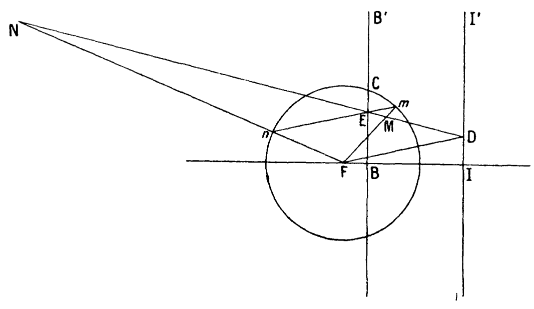
Dans le cas où la droite II' coupe le cercle, on démontre d'une façon identique que

$$\mathrm{MF} - \mathrm{MF}' = \text{const.}$$

De ce qui précède, on peut donc conclure que la perspective d'un cercle peut être une ellipse, une hyperbole ou une parabole, ces trois courbes ayant la propriété commune d'être le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant.

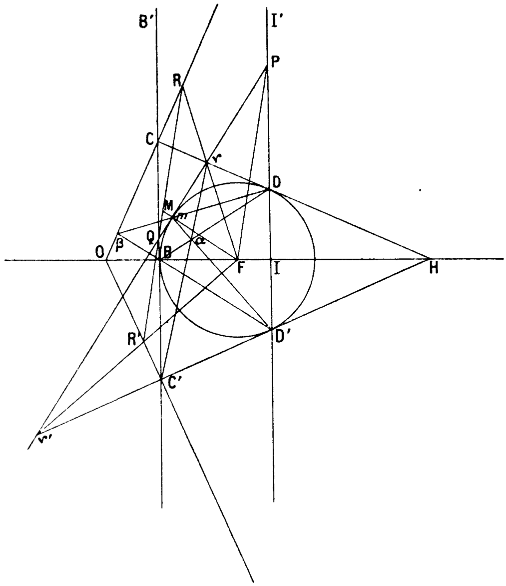
II. Soit à trouver les points d'intersection d'une droite et d'une conique à centre donné par un foyer F, la directrice correspondante II' et un point C. Projetons la conique suivant un cercle, en prenant pour origine F et pour base la perpendiculaire BB' à FI menée par C et soient D et E les points d'intersection de la droite donnée avec II' et BB'; la parallèle menée par E à FD rencontre le cercle en deux points m et n qui sont les projections des points M et N cherchés, points situés respectivement sur Fm et Fn (*fig.* 2).

Fig. 2.



III. Considérons plus particulièrement le cas de l'hyperbole et de ses asymptotes. C'est un théorème bien connu, qui peut même servir de définition à l'hyperbole, qu'une tangente à cette courbe forme avec les asymptotes un triangle d'aire constante, le point de contact étant le milieu du segment intercepté sur la tangente par les asymptotes. Pour le démontrer, projetons un cercle (*fig.* 3) en prenant pour origine son centre F,

Fig. 3.



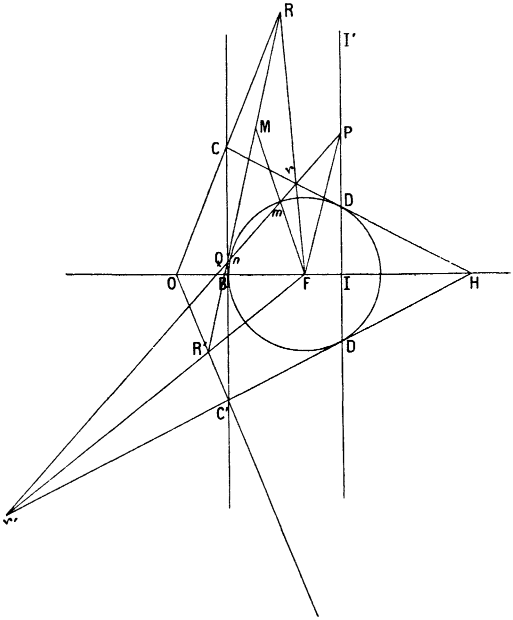
pour base la tangente BB′ en un point B et pour droite II′ une parallèle à BB′ coupant le cercle en deux points D et D′; les tangentes en D et D′ à la circonférence coupent la base respectivement en C et C′; la projection du cercle est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites OC et OC′ perpendiculaires, la première sur CD, la seconde sur C′D′; la tangente en un point m du cercle rencontre respectivement les droites II′ en P, CD en r, BB′ en Q, C′D′ en r', et se projette suivant une parallèle menée par Q à FP et rencontrant respectivement les droites OC et Fr en R, Fm en M, OC′

et Fr' en R'. La proposition sera démontrée, si l'on fait voir que les triangles ROR' et COC' sont équivalents et que M est le milieu de RR'. La première partie résulte de ce que CR' et C'R sont parallèles ou que Cr' et C'r se coupent sur la droite II'. En effet, soient γ le point d'intersection de Bm et de II', α le point d'intersection de BD et de mD', β le point d'intersection de BD' et de mD; $\alpha\gamma$ est la polaire de β, elle se confond donc avec C'r; de même $\beta\gamma$ est la polaire de α, elle se confond donc avec Cr'. Donc Cr' et C'r se coupent en γ sur II'. La seconde partie résulte immédiatement de ce que les quatre points P, r, m, r' forment une division harmonique. En effet, soit P' le conjugué harmonique de P par rapport à DD', la droite qui joint P' au pôle H de DD' est la polaire de P par rapport au cercle et aux deux tangentes; elle passe donc par m.

La proposition est donc établie; on peut démontrer, d'une manière analogue, qu'une transversale rencontre la courbe et les asymptotes en deux couples de points ayant le même milieu. En effet, soit une sécante rencontrant respectivement (*fig.* 4) II' en P, CD en r, la circonférence en m et n, la base tangente au cercle en un point Q, C'D' en r' et se projetant suivant une droite coupant OC et Fr en R, Fm en M, Fn en N, la base en Q, OC' et Fr' en R' et de plus parallèle à FP. Il suffit de montrer que le rayon FP a même conjugué harmonique par rapport à Fr et Fr' d'une part, à Fm et Fn de l'autre, ou que P a même conjugué par rapport aux deux couples de points r, r' et m, n. En effet, soit P' le conjugué de P par rapport à DD'; H étant le pôle de DD', P'H est la polaire de P par rapport au cercle et par rapport aux deux tangentes à la circonférence en D et D'.

IV. Considérons maintenant le cas de la parabole, c'est-à-dire le cas où la droite II' est tangente au cercle à projeter et prenons pour base BB' la tangente parallèle à II'. La tangente en un point m du cercle rencontre la base en D et la droite II' en C et se projette suivant

Fig. 4.



la parallèle menée par D à FC, le point de contact M se trouvant sur Fm. Or

$$\widehat{DMF} = \widehat{MFC} = \widehat{CFI} \quad \text{et} \quad \widehat{DFC} = 90^\circ.$$

Donc, dans la parabole, la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe menée par ce point, et la projection du foyer sur la tangente est sur la tangente au sommet.

Soient CD et C′D′ deux tangentes parallèles au cercle en des points m et m'; leurs projections, respectivement parallèles à FC et FC′, et par suite rectangulaires, se coupent sur la ligne de fuite, en d'autres termes sur la directrice et par suite le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice.

Cherchons enfin les points d'intersection d'une droite L et d'une parabole. Projetons la parabole suivant un cercle en prenant pour origine le foyer F, pour base BB′ la tangente au sommet B et pour droite II′ la directrice; la droite L rencontre la directrice en C, la tangente au sommet en D; sa projection, menée par D, parallèle à FC, rencontre le cercle de projection, décrit de F comme centre avec FB comme rayon, aux points m et n, projections des points M et N cherchés et situés respectivement sur les rayons Fm et Fn.

Comme conséquence de cette construction, remarquons que la bissectrice de l'angle MFN est perpendiculaire sur mn et que, par suite, FC est bissectrice de l'angle formé par FM et FN′ prolongement de FN. On a donc ce théorème bien connu, que la construction analogue, donnée précédemment, permet d'énoncer pour une conique quelconque :

Théorème. — *Soient* M, N *deux points quelconques d'une conique; la droite* FC *qui joint un foyer* F *de cette conique au point* C *de rencontre de la sécante* MN *avec la directrice qui correspond au foyer* F, *est bissectrice de l'un des angles formés par les droites* FM, FN.

On pourrait obtenir une autre construction des points d'intersection d'une parabole et d'une droite en projetant le cercle, au lieu de la parabole, et retrouver ainsi une construction donnée par M. Ernest Lebon dans les

Nouvelles Annales de Mathématiques (1885, p. 338). Soient, en effet, un cercle de centre F, BB′ et II′ deux tangentes aux extrémités du diamètre BI, M et N les points d'intersection avec une sécante qui coupe la base en C et la droite II′ en D; la sécante se projette suivant une droite L passant par C et parallèle à FD; le cercle, suivant une parabole ayant pour foyer F et pour tangente au sommet BB′, les points M et N ont pour projections les points *m* et *n* d'intersection de la droite L et de la parabole. D'où la construction. M. Lebon remarque, avec raison, qu'elle est plus simple que celle que l'on donne habituellement. Les considérations qui précèdent permettent d'ailleurs d'établir, avec la même facilité, la construction que, dans le même article, M. Lebon a donnée des points d'intersection d'une droite et d'une conique dont on connaît un foyer et les sommets situés sur l'axe focal.

Soient, en effet, F un foyer d'une conique, B et I les sommets de l'axe focal, BB′ et II′ les tangentes aux sommets, la première étant la base et la seconde la droite dont la projection passe à l'infini, la conique se projetant suivant une parabole ayant pour foyer F et pour tangente au sommet BB′. Une droite CD rencontrant II′ en C et BB′ en D se projette suivant une droite DG, coupant II′ en G, dont les points de rencontre avec la parabole, *m′* et *n′*, s'obtiennent par la construction donnée précédemment, c'est-à-dire en joignant le point d'intersection E de CF et de la droite HH′ symétrique de BB′ par rapport à F au point D, en prenant les points d'intersection *m* et *n* de DE avec le cercle de centre F et de rayon FB, puis les points d'intersection *m′* et *n′* de DG avec les rayons F*m* et F*n*. On en déduit immédiatement les points d'intersection M et N de la droite et de la conique données, qui se trouvent sur la droite CD et les rayons Fm et Fn respectivement. C'est la construction même que M. Lebon a obtenue, d'une manière toute différente. On remarquera que la ligne DG est inutile pour la construction.

N. B. — On voudra bien observer que la construction, donnée au paragraphe IV, des points d'intersection d'une droite et d'une parabole s'applique, sans modification, au cas d'une conique quelconque. La démonstration élémentaire de la construction est d'ailleurs immédiate. C'est, d'autre part, un cas particulier de celle du paragraphe II.