A. DELTOUR

# Sur une question de probabilités

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 6 (1906), p. 100-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__100_1>

[J2c]

## SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS;

PAR M. A. DELTOUR.

1. Proposons-nous de chercher *la probabilité pour que, en tirant une à une, dans un ordre quelconque, les cartes d'un jeu ordinaire, il n'y ait jamais plus de deux cartes rouges consécutives, quelles que soient les séquences de noires.*

On sait que le nombre des permutations complètes de $p$ objets A et de $p$ objets B est $\frac{2p!}{(p!)^2}$.

Le problème revient donc à trouver le nombre de ces permutations dans lesquelles il n'y a pas plus de deux A consécutifs.

Le rapport des deux nombres donne la probabilité cherchée.

2. Une représentation graphique aidera le raisonnement.

A partir de l'origine de deux axes de coordonnées rectangulaires, je porte successivement les A en abscisses, les B en ordonnées, à raison d'une unité par lettre et toujours dans le sens positif, en suivant l'ordre des lettres dans la permutation donnée.

On obtient ainsi un tracé (*fig.* 1) qui se terminera

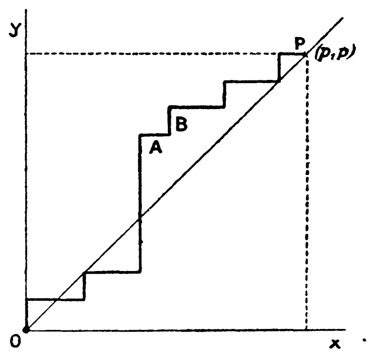


Fig. 1. — Tracé quelconque.

sur la bissectrice du premier quadrant, puisqu'il y a autant de A que de B, au point P($p$, $p$), et qui restera tout entier enfermé dans le carré ayant pour diagonale la partie de la bissectrice qui joint ce point à l'origine.

Réciproquement tout tracé compris dans ce carré et satisfaisant aux conditions données représentera une des permutations dont il s'agit et le problème revient à trouver le nombre des tracés possibles que je désignerai par $a_p$.

3. Ils se partagent en trois classes :

1° Ceux qui, commençant par un B sur l'axe des $y$, restent du même côté de la bissectrice, mais peuvent avoir avec celle-ci certains points communs (*fig.* 2) : soit $b_p$ leur nombre;

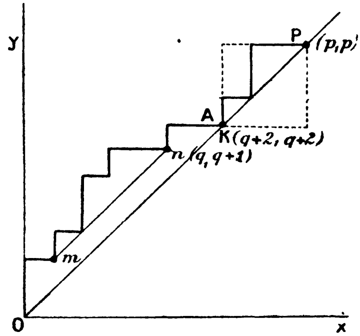


Fig. 2. — Permutation de la première catégorie.

2° Ceux qui, commençant par un B sur l'axe des $y$, traversent la bissectrice au moins en un point;

3° Ceux qui commencent par un A sur l'axe des $x$.

4. Soit $K(q+1, q+1)$ (*fig.* 3) le premier point à partir de l'origine où un tracé de la seconde catégorie *traverse* la bissectrice. En ce point il y a deux A consécutifs : les termes précédant et suivant immédiatement sont des B.

Le tracé touche par conséquent la bissectrice aux points $m(q, q)$, $n(q+2, q+2)$.

Entre l'origine et le point $m$ le tracé commence par un B et reste du même côté de la bissectrice ; le nombre des tracés possibles est $b_q$.

Entre le second point $n$ et l'extrémité P, le tracé commence soit par un B soit par un A ; c'est un des tracés compris dans le carré ayant pour sommets ces deux points ; leur nombre est $a_{p-(q+2)}$.

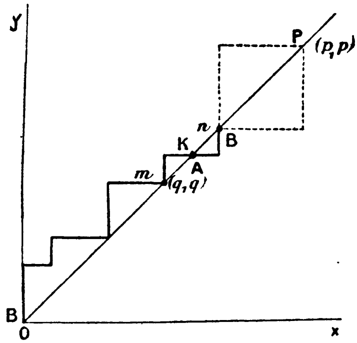


Fig. 3. — Permutation de la deuxième catégorie.

Le nombre total des tracés de la seconde catégorie est donc

$$\sum b_q a_{p-(q+2)} \qquad (q \text{ variant de } 0 \text{ à } p-2),$$

en convenant de poser $a_0 = b_0 = 1$.

5. Dans le cas où la permutation appartient à la troisième catégorie, soit $K(q+2, q+2)$ (*fig.* 4) le premier point où le tracé *touche* la bissectrice.

Si ce point a pour coordonnées $(1, 1)$, la permutation commence par AB. Le nombre des tracés correspondants à partir de $(1, 1)$ est évidemment $a_{p-1}$.

Ce cas étant éliminé, la permutation commence par deux A suivis d'un B et arrive au point K par un B.

Abstraction faite de ces quatre lettres, le tracé a pour extrémités les deux points $m(2, 1)$, $n(q+2, q+1)$ situés sur une parallèle à la bissectrice et reste constamment du même côté de cette droite. On reconnaît facilement que ce tracé, pris en sens inverse et considéré comme ayant son origine au point $n$, remplit les mêmes conditions que ceux de la première catégorie.

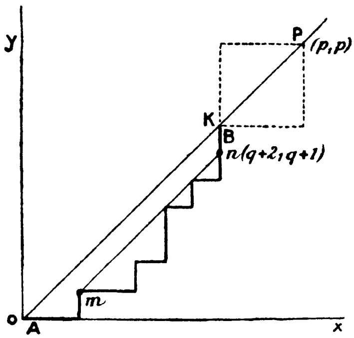


Fig. 4. — Permutation de la troisième catégorie.

Le nombre des tracés possibles entre les deux points extrêmes est donc $b_q$.

A partir du point K auquel on arrive par un B, le nombre des permutations est $a_{p-(q+2)}$.

Le nombre des permutations de la troisième catégorie est par conséquent

$$a_{p-1}+\sum b_q a_{p-(q+2)} \quad (q \text{ variant de } 0 \text{ à } p-2).$$

Réunissant les trois résultats obtenus, on a la formule

$$(1) \qquad a_p = b_p + 2\sum_{q=0}^{q=p-2} b_q a_{p-(q+2)} + a_{p-1}.$$

6. Reste maintenant à déterminer le nombre $b_p$ des permutations de la première catégorie.

Soit $K(q+2, q+2)$ (*fig.* 2) le premier point où l'un des tracés *touche* la bissectrice. Si ce point a pour coordonnées (1, 1) la permutation commence par BA. Le nombre des tracés correspondants à partir de (1, 1) est $b_{p-1}$. Ce cas éliminé, la permutation commence par un B et arrive en K par BAA. Abstraction faite de ces quatre lettres, on a, comme précédemment, entre les deux points $m(0, 1)$, $n(q, q+1)$, situés sur une parallèle à la bissectrice, un tracé présentant les caractères de ceux de la première catégorie et dont le nombre est $b_q$.

A partir du point K jusqu'à la fin, le tracé conserve les caractères de ceux de la première catégorie dont le nombre est $b_{p-(q+2)}$.

On a par conséquent la formule suivante :

$$b_p = b_{p-1} + \sum_{q=0}^{q=p-2} b_q b_{p-(q+2)}. \tag{2}$$

Les deux formules (1) et (2) permettent de calculer les valeurs des $a_p$.

7. Le Tableau ci-dessous donne les résultats qu'on obtient pour les premières valeurs de $p$.

| $p$. | $b_p$. | $a_p$. |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 6 |
| 3 | 4 | 16 |
| 4 | 9 | 45 |
| 5 | 21 | 126 |
| 6 | 51 | 357 |
| 7 | 127 | 1016 |
| 8 | 323 | 2907 |

Ainsi, si l'on a seize cartes, huit rouges et huit noires, rangées dans un ordre quelconque, la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de deux cartes rouges consécutives, les séquences de noires étant quelconques, est

$$\frac{2907}{\frac{16!}{(8!)^2}} = \frac{323}{10.11.13} = 0,225.$$

Lorsque $p$ augmente, la probabilité diminue. Si l'on cherche la valeur de $p$ pour laquelle elle se rapproche le plus de $\frac{1}{2}$, on trouve qu'elle a exactement cette valeur pour $p = 5$. Elle est, en effet,

$$\frac{126}{\frac{10!}{(5!)^2}} = \frac{1}{2}.$$