Arthur Maluski

Sur la développée et les quasi-développées d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__97_0>

[L[1]5e]

SUR LA DÉVELOPPÉE ET LES QUASI-DÉVELOPPÉES D'UNE CONIQUE;

PAR M. ARTHUR MALUSKI.

1. Voici un moyen rapide d'exprimer qu'une droite est normale à une conique.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 \\ \qquad + 2\,\mathrm{F}yz + 2\,\mathrm{G}zx + 2\,\mathrm{H}xy = 0 \end{cases}$$

l'équation homogène d'une conique (S) rapportée à des axes rectangulaires. Si l'on désigne par Δ et par $\mathrm{F}(u, v, w)$ le discriminant et la forme adjointe de la forme quadratique $f(x, y, z)$, on sait que le système des tangentes à la conique (S) aux points où elle est coupée par la droite (D) ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

est représenté par l'équation

$$(2)\quad \Delta(ux + vy + wz)^2 - f(x, y, z)\,\mathrm{F}(u, v, w) = 0.$$

Ceci posé, pour que la droite (D) soit normale à la conique (S), il faut et il suffit que l'une des droites représentées par l'équation (2) soit perpendiculaire à la droite (D), et que, par conséquent, l'équation (2) soit vérifiée par les coordonnées du point rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite (D), c'est-à-dire par u, v et o. On a ainsi la condition cherchée

$$(3)\quad \Delta(u^2 + v^2)^2 - \varphi(u, v)\,\mathrm{F}(u, v, w) = 0$$

où l'on a posé

$$\varphi(u, v) = A u^2 + 2 H uv + B v^2.$$

Cette forme d'équation montre immédiatement que les foyers de la conique (S) sont aussi foyers de sa développée.

2. La même méthode s'applique à la recherche des quasi-développées. Appelons *quasi-développée* de la conique (S) relativement à une conique (S′) l'enveloppe de la conjuguée harmonique (D) de la tangente en un point A de la conique (S) par rapport aux tangentes à la conique (S′) issues du point A lorsque ce point décrit la conique (S).

La droite (D) et la tangente en A à la conique (S) étant conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes à (S′) issues de A sont conjuguées par rapport à (S′); cette condition nécessaire est du reste suffisante.

Prenons un triangle quelconque comme triangle de référence et supposons que la conique (S) rapportée à ce triangle ait une équation ponctuelle de la forme (1), la droite (D) étant toujours représentée par l'équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation (2) représente encore le système des tangentes à la conique (S) aux points A et B où elle est coupée par la droite (D).

Soit

$$\text{(4)} \qquad H(U, V, W) = 0$$

l'équation tangentielle de la conique (S′).

Pour que la droite (D) soit conjuguée à la tangente en A par rapport à la conique (S′), il faut et il suffit que le pôle de (D) par rapport à (S′) soit sur cette tangente, et, par conséquent, que l'équation (2) soit vérifiée quand on y remplace x, y, z par les coordonnées de ce point, soit H'_u, H'_v, H'_w, ce qui donne la condition cherchée

$$(5) \qquad 4\Delta[H(u, v, w)]^2 - f(H'_u, H'_v, H'_w)F(u, v, w) = 0.$$

Si l'on suppose que l'équation (4) représente le système des deux points cycliques, il n'y a rien de changé à la démonstration précédente et l'équation (5) est alors l'équation tangentielle de la développée de (S), en coordonnées trilinéaires, et l'on voit que cette équation est beaucoup plus simple qu'on aurait pu le supposer, surtout si l'on se reporte à la complication des calculs auxquels il faut se livrer pour avoir l'équation de la même courbe en coordonnées ponctuelles (*voir*, par exemple, Salmon, *Courbes planes*, nos 106 et 109 de la traduction).

Cette courbe se décompose en un point et une courbe de troisième classe lorsque les deux coniques (S) et (S′) sont tangentes, le point étant le point de contact.

3. Supposons les deux coniques (S) et (S′) rapportées à leur triangle conjugué commun, de façon qu'on ait

$$f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2,$$
$$H(u, v, w) \equiv a'u^2 + b'v^2 + c'w^2.$$

L'équation (5) devient alors

$$(a'u^2 + b'v^2 + c'w^2)^2 - \left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c}\right)(aa'^2u^2 + bb'^2v^2 + cc'^2w^2) = 0$$

ou

$$(6) \qquad Av^2w^2 + Bw^2u^2 + Cu^2v^2 = 0$$

en posant

$$A = a(bb' - cc')^2,$$
$$B = b(cc' - aa')^2,$$
$$C = c(aa' - bb')^2.$$

La courbe qu'elle représente a pour équation ponctuelle

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^3 - 27\,ABC\,x^2y^2z^2 = 0.$$

Elle a, par conséquent, les mêmes singularités qu'une développée de conique : elle possède six points de rebroussement, situés deux à deux sur les côtés du triangle de référence; chaque côté est tangent à la courbe en chacun des deux points qu'il contient et les points de contact sont conjugués harmoniques par rapport à deux sommets du triangle de référence.

Elle a en outre, comme on le sait, quatre autres points doubles. Tout cela est du reste évident si l'on remarque qu'elle peut être considérée comme transformée homographique d'une développée de conique. En effet, soit (Δ) la tangente en (A) à la conique (S) et (D) celle de ses conjuguées par rapport à (S') qui passe par A. Les droites (D) et (Δ) sont également conjuguées par rapport à (S), par conséquent elles sont conjuguées par rapport à toute conique du faisceau tangentiel qui a pour bases (S) et (S'). Cela veut dire que la *quasi-développée de* (S) *relativement à* (S') *ne change pas quand on remplace* (S') *par une conique quelconque du faisceau tangentiel ayant pour bases* (S) *et* (S'). En particulier, cette propriété reste vraie lorsqu'on remplace (S') par un couple d'ombilics communs à (S) et (S') et il n'y a plus alors qu'à faire une transformation homographique faisant correspondre les points cycliques à ces ombilics pour établir notre assertion.

Si l'on prend la polaire réciproque de la courbe (6) par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, on obtient la courbe

$$(7) \qquad Ay^2z^2 + Bz^2x^2 + Cx^2y^2 = 0.$$

C'est une quartique unicursale, étudiée par Laguerre [1] et qu'il a appelée quartique à trois points doubles d'inflexion, parce que la tangente en un point double la coupe en quatre points confondus avec lui.

On sait que si l'on pose

$$P = xx_0(Bz^2 + Cy^2) + yy_0(Cz^2 + Ax^2) + zz_0(Ay^2 + Bx^2),$$
$$Q = Ay_0z_0yz + Bz_0x_0zx + Cx_0y_0xy,$$
$$R = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0},$$

on a l'identité remarquable due à Laguerre

$$QR \equiv P + \frac{Q_0xyz}{x_0y_0z_0},$$

et au moyen de laquelle l'illustre géomètre a démontré simplement que, si l'on prend un point $M(x_0, y_0, z_0)$ sur la courbe (7), les points de contact autres que M des tangentes à cette courbe issues du point M sont sur la droite $R = 0$, polaire trilinéaire du point M par rapport au triangle de référence.

On en conclut immédiatement, soit en refaisant la transformation inverse, soit en calquant les calculs précédents, que, si l'on considère une droite u_0, v_0, w_0 tangente à la courbe (6), les tangentes aux quatre points, autres que le point de contact, où elle rencontre la courbe passent par le point

$$\frac{u}{u_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{w}{w_0} = 0,$$

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 337.

pôle trilinéaire de la droite u_0, v_0, w_0 par rapport au triangle de référence.

C'est, du reste, une propriété bien connue des développées.

4. Le rapprochement précédent entre les quasi-développées et les courbes de Laguerre donne une construction géométrique intéressante de la tangente en un point à toute une classe de ces courbes. En effet, considérons une conique (C) rapportée à des axes rectangulaires, d'ailleurs quelconques, et transformons par polaires réciproques la propriété de sa développée, en prenant pour conique directrice le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

On a le théorème suivant :

Si l'on joint un point variable A *d'une conique* (S) *à un point fixe* O *du plan et qu'on appelle* M *le point d'intersection de la tangente en* A *avec la perpendiculaire menée par* O *à la droite* OA, *le lieu du point* M *est une quartique de Laguerre, ayant comme points doubles les sommets du triangle rectangle en* O *conjugué à la conique* (S).

Pour construire la tangente en M à cette courbe, remarquons que le point de contact de la normale à une conique (C) avec son enveloppe est le centre du cercle osculateur à cette conique, au pied de la normale. Transformons cette construction par polaires réciproques.

Au cercle osculateur correspond une conique S′ osculatrice en A à la conique (S) et ayant son foyer en O, ce qui la détermine. La tangente en M à la quartique de Laguerre est la transformée du centre du cercle osculateur précédent : c'est donc la polaire du centre de ce cercle par rapport à la conique fondamentale, c'est-à-dire, d'après une propriété connue, la directrice de la conique (S′) correspondant au foyer O.

Reste à construire cette droite. Pour cela, remarquons que les coniques (S) et (S′) ont même cercle osculateur en A. Soit I son centre. Cherchons le second foyer O′ de (S′); pour cela, remarquons que, si l'on désigne par N le point d'intersection de la normale en A à (S) avec OO′, on sait que, IK étant la perpendiculaire abaissée du point I sur OA, la droite NK est perpendiculaire à AN. Cette remarque détermine le point N; ayant le point N, on connaît l'axe focal ON; la directrice cherchée est alors la perpendiculaire abaissée du point M sur ON.

Une transformation homographique convenable permettrait d'étendre la construction précédente.