Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 564-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__564_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1246.

(1877, p. [illegible].)

a, b, c, ..., k étant des quantités inégales, on a

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left(\frac{1}{a-b} + \ldots + \frac{1}{a-k} \right) \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{(a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (a-k)^2} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

(CATALAN.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation dont les racines sont $a, b, \ldots, k$. On a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k};$$

d'où

$$\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k} = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{(x-a)f(x)}.$$

Si l'on fait $x = a$, le second membre prend la forme $\frac{0}{0}$. En appliquant deux fois la règle de L'Hospital, on trouve

$$\frac{1}{a-b} + \ldots + \frac{1}{a-k} = \frac{f''(a)}{2f'(a)}.$$

D'autre part,

$$(a-b)\ldots(a-k) = f'(a).$$

La relation à démontrer peut donc s'écrire

$$\sum \frac{f''(a)}{[f'(a)]^3} = 0. \tag{1}$$

Pour l'établir, considérons la fraction rationnelle $\frac{1}{[f(x)]^2}$. Son développement en somme de fractions simples est de la forme

$$\frac{1}{[f(x)]^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a} + \ldots + \frac{K}{(x-k)^2} + \frac{K'}{x-k}. \tag{2}$$

Par l'application de la méthode classique, on trouve

$$A = \frac{1}{[f'(a)]^2},$$

$$A' = \frac{-f''(a)}{[f'(a)]^3},$$

et des valeurs analogues pour B, B', ..., K, K'.

Cela posé, on tire de l'identité (2)

$$1 = A\frac{[f(x)]^2}{(x-a)^2} + \dots + K\frac{[f(x)]^2}{(x-k)^2} + A'\frac{[f(x)]^2}{x-a} + \dots + K'\frac{[f(x)]^2}{x-k}.$$

En écrivant que le terme de plus haut degré, dans le second membre, a un coefficient nul, il vient

$$A' + \dots + K' = 0,$$

ce qui établit la relation (1) et, par suite, l'identité (A) de l'énoncé.

1355.

(1880 p 566)

Le volume du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, *qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un tétraèdre donné* ABCD, *a pour expression*

$$V \times \begin{vmatrix} 0 & \cos\eta & \cos\varepsilon & \cos\alpha \\ \cos\eta & 0 & \cos\delta & \cos\beta \\ \cos\varepsilon & \cos\delta & 0 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

en appelant V *le volume du tétraèdre donné et* α, β, γ, δ, ε *et* η *les angles dièdres de ce tétraèdre, le long des arêtes* BC, CA, AB, DA, DB *et* DC *respectivement.* (GENTY.)

SOLUTION

Par M. R. B.

La méthode de Grassmann donne une démonstration rapide de la proposition énoncée.

Désignons par a, b, c, d les aires respectives des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Le point A_1 est le barycentre des points B, C, D, affectés respectivement de masses proportionnelles aux aires A_1CD, A_1DB, A_1BC (en tenant compte des signes de ces aires, déterminés d'après les conventions ordinaires). Or on a, en grandeur et en signe,

$$A_1CD = b\cos\eta,\qquad A_1DB = c\cos\varepsilon,\qquad A_1BC = d\cos\alpha,$$
$$A_1CD + A_1DB + A_1BC = a.$$

On peut donc écrire

$$A_1 = \frac{b}{a}\cos\eta\,B + \frac{c}{a}\cos\varepsilon\,C + \frac{d}{a}\cos\alpha\,D;$$

de même,

$$B_1 = \frac{a}{b}\cos\eta\,A + \frac{c}{b}\cos\delta\,C + \frac{d}{b}\cos\beta\,D,$$

$$C_1 = \frac{a}{c}\cos\varepsilon\,A + \frac{b}{c}\cos\delta\,B + \frac{d}{c}\cos\gamma\,D,$$

$$D_1 = \frac{a}{d}\cos\alpha\,A + \frac{b}{d}\cos\beta\,B + \frac{c}{d}\cos\gamma\,C.$$

On obtient le volume $A_1B_1C_1D_1$ en effectuant le produit progressif des quatre expressions précédentes; on a, en vertu d'un résultat bien connu :

$$A_1B_1C_1D_1 = ABCD\begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{a}\cos\eta & \frac{c}{a}\cos\varepsilon & \frac{d}{a}\cos\alpha \\ \frac{a}{b}\cos\eta & 0 & \frac{c}{b}\cos\delta & \frac{d}{b}\cos\beta \\ \frac{a}{c}\cos\varepsilon & \frac{b}{c}\cos\delta & 0 & \frac{d}{c}\cos\gamma \\ \frac{a}{d}\cos\alpha & \frac{b}{d}\cos\beta & \frac{c}{d}\cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui se réduit bien à l'expression indiquée.

1371.

(1881, p. 383.)

Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *trois diamètres quelconques de trois circonférences ayant* O *pour centre radical;* M *un point quelconque du plan;* OB_1D_1, OB_2D_2, OB_3D_3 *trois triangles symétriquement semblables à* OMA_1, OMA_2, OMA_3 *respectivement : démontrer que les trois points* D_1, D_2, D_3 *sont en ligne droite.* (Laisant.)

SOLUTION

Par M. THIE.

Ce problème se traite aisément par la méthode des équipollences.

Désignons par a_1, b_1, ..., m les affixes des points A_1, B_1, ..., M, le point O étant pris pour origine.

Soit, en général, x' l'imaginaire conjugué de x. Les conditions de l'énoncé se traduisent, comme il est bien connu, par les relations

$$a_1 b'_1 + b_1 a'_1 = a_2 b'_2 + b_2 a'_2 = a_3 b'_3 + b_3 a'_3.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{a'_1}{m'} \qquad \text{ou} \qquad d_1 = \frac{b_1 a'_1}{m}$$

et de même

$$d_2 = \frac{b_2 a'_2}{m}, \qquad d_3 = \frac{b_3 a'_3}{m}.$$

On en conclut immédiatement que les trois points, dont les affixes sont md_1, md_2, md_3, satisfont aux relations

$$md_1 + (md_1)' = md_2 + (md_2)' = md_3 + (md_3)'.$$

Ces trois points sont donc sur une même droite, perpendiculaire à Ox. Les trois points D_1, D_2, D_3, qui forment une figure semblable à celle que forment les trois points md_1, md_2, md_3, sont donc aussi en ligne droite. C. Q. F. D.

1416.

(1882, p. 384)

Soient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = R$$

et α_{ik} *le coefficient de* a_{ik} *dans* R. *Si l'on désigne par* D *le déterminant suivant*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm a_{11} & a_{12} \pm a_{21} & \dots & a_{1n} \pm a_{n1} \\ a_{21} \pm a_{12} & a_{22} \pm a_{22} & \dots & a_{2n} \pm a_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} \pm a_{1n} & a_{n2} \pm a_{2n} & \dots & a_{nn} \pm a_{nn} \end{vmatrix}$$

et par Δ *le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans* D *les quantités* a_{ik} *par* α_{ik}, *on aura*

$$\Delta = R^{n-2} D.$$

(E. Hunyady.)

SOLUTION

Par un Abonne.

J'ai corrigé une erreur évidente dans la première colonne du déterminant D.

Si l'on désigne par ρ le déterminant des α_{ik}, on a

$$R^{n-1} = \rho;$$

la relation à démontrer devient

$$R\Delta = \rho D.$$

Faisons, pour abréger l'écriture, $n = 3$. Nous devons démontrer l'égalité des deux produits

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha \pm \alpha & \beta \pm \alpha' & \gamma \pm \alpha'' \\ \alpha' \pm \beta & \beta' \pm \beta' & \gamma' \pm \beta'' \\ \alpha'' \pm \gamma & \beta'' \pm \gamma' & \gamma'' \pm \gamma'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a \pm a & b \pm a' & c \pm a'' \\ a' \pm b & b' \pm b' & c' \pm b'' \\ a'' \pm c & b'' \pm c' & c'' \pm c'' \end{vmatrix}.$$

Le premier produit, effectué en combinant les *lignes* des deux déterminants pour former celles du déterminant produit, est

$$\begin{vmatrix} R \pm (a\alpha + b\alpha' + c\alpha'') & \pm(a\beta + b\beta' + c\beta'') & \pm(a\gamma + b\gamma' + c\gamma'') \\ \pm(a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'') & R \pm (a'\beta + b'\beta' + c'\beta'') & \pm(a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'') \\ \pm(a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'') & \pm(a''\beta + b''\beta' + c''\beta'') & R \pm (a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma'') \end{vmatrix}.$$

Ce second produit, effectué en combinant les *colonnes* des deux déterminants pour former celles du déterminant produit, est identique au premier.

1632.

(1892, p. 14*.)

Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver une ligne plane dont les cercles osculateurs soient vus sous un angle constant d'un point du plan. (E. CESÀRO.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soit C une courbe telle que tous ses cercles osculateurs soient vus d'un point O sous un angle constant. Si m est un point quelconque de C, μ le centre de courbure en ce point, on doit avoir

$$\frac{O\mu}{m\mu} = \text{const.} \tag{1}$$

Mais $m\mu$ est égal à l'arc de la courbe Γ, développée de C, compté à partir d'une origine convenable. La courbe Γ jouit donc de cette propriété que l'arc de cette courbe, compris entre un certain point fixe et le point variable μ, est proportionnel à $O\mu$.

On en conclut facilement que Γ est une spirale logarithmique de pôle O. La courbe C, développante de Γ, est aussi une spirale logarithmique de pôle O. Mais la constante qui figure dans le premier membre de l'égalité (1) est nécessairement inférieure à l'unité; autrement dit, *le point* O *est intérieur à tous les cercles osculateurs de* C : l'angle, sous lequel on voit de ce point les cercles en question, est bien constant, mais il est imaginaire.

1662.

(1894, p. 2*.)

Démontrer que la clothoïde [1] *est la seule courbe*

[1] Ligne dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. Voir *Nouvelles Annales,* 1886, p. 512.

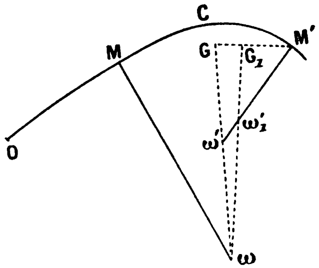
jouissant de la propriété suivante : le barycentre d'un arc quelconque est en ligne droite avec les centres de courbure aux points extrêmes. (CESÀRO.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient C une courbe satisfaisante, M et M′ deux points quelconques de cette courbe, G le barycentre de l'aire MM′, ω et ω' les centres de courbure en M et en M′. Soient encore M″ un point (non représenté sur la figure) infiniment voisin de M′, G_1 le centre de gravité de l'arc MM'_1, ω'_1 le centre de courbure en M'_1.

Appelons S et S′ les arcs OM et OM′, O étant une origine



quelconque sur C, R et R′ les rayons de courbure Mω, M′ω', dS' l'arc infiniment petit M′M″.

G_1 est le barycentre de deux masses, l'une, S, appliquée en G, l'autre, dS, appliquée en M′. G_1 est donc sur GM′, et l'on a

$$\frac{G_1 G}{G_1 M'} = -\frac{dS'}{S'-S}.$$

ω'_1 est sur ω'M′, et l'on a

$$\frac{\omega'_1 \omega'}{\omega'_1 M'} = \frac{dR'}{R'+dR'} = \frac{dR'}{R'},$$

en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur. Cela posé, les trois points ω, ω'_1, G sont en ligne droite; de même, les trois points ω, ω'_1, G_1.

On a donc, par le théorème des transversales,

$$\frac{G_1 G}{G_1 M'}\,\frac{\omega'_1 M'}{\omega'_1 \omega'}\,\frac{\omega\omega'}{\omega G} = 1$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dS'}{dR'}\,\frac{R'}{S' - S} = -\frac{\omega G}{\omega\omega'}.$$

Nous avons obtenu cette relation en supposant que l'on fait varier le point M, le point M' restant fixe. Faisons maintenant le contraire.

On formera d'une manière toute semblable la relation

$$(2) \qquad \frac{dS}{dR}\,\frac{R}{S - S'} = -\frac{\omega' G}{\omega'\omega} = \frac{\omega' G}{\omega\omega'}.$$

On tire des relations (1) et (2)

$$\frac{dS}{dR}\,\frac{R}{S - S'} + \frac{dS'}{dR'}\,\frac{R'}{S' - S} = -1$$

ou

$$R\frac{dS}{dR} - R'\frac{dS'}{dR'} = S' - S$$

ou enfin

$$R\frac{dS}{dR} + S = R'\frac{dS'}{dR'} + S'.$$

Le premier membre est fonction de S seulement, le deuxième de S' seulement. Leur valeur commune est, par suite, une constante a.

Soit donc

$$R\frac{dS}{dR} + S = a$$

ou

$$R(S - a) = K.$$

On reconnaît là l'équation intrinseque de la clothoïde.

Quant à la réciproque, on peut la démontrer au moyen des formules contenues dans l'article cité plus haut (dont l'auteur est M. Cesàro).

1742.

(1896, p. 392)

Trouver toutes les courbes telles que, pour chacune d'elles, le lieu du centre de gravité des arcs comptés à partir d'une même origine coïncide avec la développée.

(TH. CARONNET.)

SOLUTION

Par M. THIE.

Soient OM un arc de courbe compté à partir d'une certaine origine, G le centre de gravité de cet arc.

On sait que la tangente en G à la courbe (G) passe par le point M.

D'autre part, si (G) coïncide avec la développée de la courbe (M), c'est que cette même tangente est normale à (M) en un certain point M'.

Je supposerai que M *et* M' *coïncident.*

Le cas où il en serait autrement serait évidemment beaucoup plus difficile à traiter.

Soient donc M et M_1 deux points infiniment voisins sur (M), G et G_1 les centres de gravite correspondants : G et G_1 sont les centres de courbure, en M et en M_1, de la courbe (M). On doit avoir la relation

$$\frac{G_1 G}{G_1 M_1} = - \frac{MM_1}{\text{arc}\, OM}.$$

Posons

$$\text{arc}\, OM = s,$$

$$GM = \rho.$$

L'équation précedente peut s'écrire

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{ds}{s}.$$

D'où

$$s\rho = \text{const.}$$

Cette équation intrinsèque définit, on le sait, une *clothoïde*.

1752.

(1896, p. 243.)

Démontrer que toute équation différentielle de la forme

$$f\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2},\ x\frac{dy}{dx},\ y\right) = 0,$$

où f désigne une fonction homogène de trois variables, peut s'intégrer au moyen de deux quadratures.

Appliquer à l'exemple suivant

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ay\frac{dy}{dx} = 0,$$

où a désigne une constante. (C. Bourlet.)

SOLUTION

Par M. R. B.

L'équation proposée peut s'écrire

$$(1) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi\left(\frac{x\dfrac{dy}{dx}}{y}\right),$$

φ étant une fonction quelconque. Posons

$$(2) \qquad t = x\frac{dy}{dx}.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{x},$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dt}{dx} - t = x\frac{dt}{dy}\,\frac{dy}{dx} - t = t\frac{dt}{dy} - t.$$

L'équation (1) devient donc

$$t\frac{dt}{dy} - t = y\,\varphi\left(\frac{t}{y}\right)$$

ou

$$(3) \qquad \frac{dt}{dy} = 1 + \frac{y}{t}\,\varphi\left(\frac{t}{y}\right).$$

Cette équation différentielle du premier ordre, homogène entre t et y, s'intègre, comme on le sait, au moyen d'une quadrature. On tirera ensuite x de l'équation (2), par la formule

$$x = e^{\int \frac{dy}{t}}.$$

En appliquant cette méthode à l'exemple proposé, on trouvera sans peine comme solution générale

$$y = \frac{K}{K' x^{a+1} + 1},$$

où K et K' sont deux constantes arbitraires.