Nouvelles annales de mathématiques

Lancelot

Points multiples des surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 53-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__53_1>

[M²1b]

POINTS MULTIPLES DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. LANCELOT.

Nous ne nous sommes, jusqu'ici, occupés que des points simples, c'est-à-dire des points de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

pour lesquels les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas toutes trois nulles.

Points doubles. — Supposons que, pour un point M de la surface, les trois dérivées partielles s'annulent. L'équation aux λ des points d'intersection de la surface et d'une droite passant par M est alors

$$\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = 0$$

et elle a toujours au moins une racine double nulle. Toute droite passant par M y coupe la surface en deux points confondus.

Supposons que le coefficient de λ^2 ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire que les six dérivées partielles du second ordre f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{zx} ne soient pas toutes nulles. En général deux points seulement de l'intersection seront confondus en M : le point M est dit *point double*.

Un troisième point viendra se confondre avec les deux premiers, si l'on prend une droite dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

Une telle droite est dite *tangente à la surface du point double* M, et y coupe la surface en trois points confondus. En un point double, il y a donc une infinité de tangentes formant un cône du second degré, ayant pour équation

$$\begin{aligned}(X - x)^2 f''_{x^2} + (Y - y)^2 f''_{y^2} + (Z - z)^2 f''_{z^2} \\ + 2(X - x)(Y - y) f''_{xy} \\ + 2(Y - y)(Z - z) f''_{zx} + 2(Z - z)(X - x) f''_{zx} = 0.\end{aligned}$$

Divers cas sont à considérer suivant la nature de ce cône. Soit, en général, un cône du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Décomposons cette forme quadratique en une somme de carrés. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}(A^2x^2 + 2AB''xy + 2AB'xz + B''^2y^2 + B'^2z^2 + 2B'B''yz) \\ + \left(A' - \frac{B''^2}{A}\right)y^2 + 2\left(B - \frac{B'B''}{A}\right)yz + \left(A'' - \frac{B'^2}{A}\right)z\end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{A}[(Ax + B''y + B'z)^2 + a''y^2 + a'z^2 + 2byz],$$

les petites lettres désignant les mineurs des éléments correspondants du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Achevons la décomposition en carrés, il vient

$$\frac{1}{A}\left[(Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y + bz)^2 + \left(a' - \frac{b^2}{a''}\right)z^2\right];$$

le coefficient de z^2 est $\dfrac{a'a'' - b^2}{a''}$ ou, d'après un théorème connu sur les déterminants adjoints, $\dfrac{\Delta A}{a''}$. On a donc

$$\frac{1}{A}\left((Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y + bz)^2 + \frac{\Delta A}{a''}z^2\right).$$

Pour que le cône soit imaginaire, il faut et il suffit que les trois carrés soient de même signe, ou que

$$a'' > 0, \qquad \Delta A > 0.$$

En opérant la décomposition dans un autre ordre (en commençant par d'autres variables), on aurait trouvé :

1° En commençant par x, et continuant par y d'abord, puis par z,

$$a'' > 0, \qquad \Delta A > 0,$$
$$a' > 0, \qquad \Delta A > 0;$$

2° En commençant par y, et continuant par z, puis par x,

$$a > 0, \qquad \Delta A' > 0,$$
$$a'' > 0, \qquad \Delta A' > 0;$$

3° En commençant par z, et continuant par x, puis par y,

$$a' > 0, \qquad \Delta A'' > 0,$$
$$a > 0, \qquad \Delta A'' > 0.$$

Donc, si le cône est imaginaire, a, a', a'' sont positifs; et Δ, A, A', A'' sont de même signe.

Je dis que les conditions $a > 0$, $a' > 0$ entraînent toutes les autres, car elles s'écrivent

$$A'A'' - B^2 > 0, \qquad A''A - B'^2 > 0,$$

et, B^2 et B'^2 étant positifs, entraînent

$$A'A'' > 0, \qquad A''A > 0.$$

Mais

$$A'A'' > B^2, \qquad AA'' > B'^2.$$

Multiplions

$$AA'A''^2 > B^2 B'^2.$$

Donc AA' est positif; et A, A', A'' sont de même signe.

Je dis que a'' est positif. En effet,

$$a'' = AA' - B''^2;$$

or

$$AA' > \frac{B^2 B'^2}{A''^2},$$

d'où

$$AA' - B''^2 > \frac{B^2 B'^2 - B''^2 A''^2}{A''^2},$$

et il faut montrer que

$$B^2 B'^2 - B''^2 A''^2 > 0;$$

or,

$$A'' > \frac{B^2}{A'}, \qquad A'' > \frac{B'^2}{A},$$

d'où

$$A''^2 > \frac{B^2 B'^2}{AA'}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$B^2 B'^2 - \frac{B''^2 B^2 B'^2}{AA'} > 0;$$

or ceci équivaut, AA' étant positif, à l'inégalité supposée :

$$AA' - B''^2 > 0.$$

Donc a'' est positif.

Enfin, on sait que

$$\Delta A = a'a'' - b^2, \qquad \Delta A' = a''a - b'^2, \qquad \Delta A'' = aa' - b''^2,$$

d'où

$$\Delta^2 AA' = (a'a'' - b^2)(a''a - b'^2)$$

et ainsi de suite. Les produits AA' étant positifs, les quantités $(a'a'' - b^2)$, ... sont toutes de même signe. Comme (déterminants adjoints)

$$\Delta^2 a = (a'a'' - b^2)$$

et que a est positif, elles sont toutes trois positives, et ΔA est positif.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le cône du second degré soit imaginaire sont que deux des trois mineurs a, a', a'' soient positifs : le troisième l'est alors aussi.

Le cône des tangentes en un point double sera donc :

1° Imaginaire si les trois mineurs de $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}$ dans le déterminant des dérivées secondes sont positifs ; ce déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix},$$

et le cône sera imaginaire si

$$f''_{y^2}f''_{z^2} - f''^2_{yz} > 0, \qquad f''_{z^2}f''_{x^2} - f''^2_{zx} > 0, \qquad f''_{x^2}f''_{y^2} - f''^2_{xy} > 0;$$

on a alors un point double à tangentes imaginaires.

2° Le cône des tangentes sera réel, si deux au moins des trois quantités précédentes sont négatives. On verrait facilement que la troisième est alors forcément positive. On a alors un point double à tangentes réelles.

Si le déterminant D est différent de o, le cône des tangentes est un cône propre du second degré. Si $D = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce cône se décompose en deux plans tangents à la surface en M, plans qui peuvent être confondus.

Donc cinq sortes de points coniques :

1° Un point double réel $\left\{ \begin{array}{l} \text{un cône tangent réel,} \\ \text{deux plans tangents réels;} \end{array} \right.$

2° Point double à tangentes imaginaires $\left\{ \begin{array}{l} \text{un cône tangent imaginaire,} \\ \text{deux plans tangents imaginaires,} \\ \text{un plan tangent double.} \end{array} \right.$

Exemples :

I. $z^3 = x^2 + y^2 - z^2$. — La surface a un cône tangent réel à l'origine. Comme

$$f'_x = 2x, \qquad f'_y = 2y, \qquad f'_z = -3z^2 - 2z,$$

ces équations sont satisfaites pour

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ z = -\frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

Le point $(x = 0, y = 0, z = 0)$ est sur la surface, le point $\left(x = 0, y = 0, z = -\frac{2}{3}\right)$ n'y est pas : elle n'a qu'un seul point double à tangentes réelles.

II. $z^3 = x^2 + y^2 + z^2$. — Cette surface a un seul point double, l'origine, qui est un point double à tangentes imaginaires.

III. $z^3 = x^2 - y^2$:

$$f'_x = 2x, \qquad f'_y = -2y, \qquad f'_z = -3z^2.$$

Donc, la surface a pour point double l'origine, avec deux plans tangents réels; c'est son seul point double.

IV. $z^3 = x^2 + y^2$. — La surface a pour point double l'origine, avec deux plans tangents imaginaires; c'est son seul point double.

Remarque. — Soit une surface $f(x, y, z) = 0$. Ses points doubles satisfont à quatre équations, celle de la surface, et les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0.$$

En général, ces quatre équations sont incompatibles, et, en général, une surface n'a pas de point double.

Il peut arriver que les quatre équations aient un nombre fini de solutions communes, et qu'il y ait un certain nombre de points doubles; ou même une infinité de solutions communes, et que la surface ait une ligne de points doubles.

Je dis que, en tout point double appartenant à une ligne double, le cône des tangentes est décomposé en deux plans. En effet, si la surface a une ligne double, les trois surfaces $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ passent par cette ligne double. Cherchons la tangente à cette ligne double : elle est située dans les plans tangents à ces trois surfaces auxiliaires, plans qui ont pour équations

$$\begin{aligned}
(X - x) f''_{x^2} + (Y - y) f''_{xz} + (Z - z) f''_{xz} &= 0,\\
(X - x) f''_{xy} + (Y - y) f''_{y^2} + (Z - z) f''_{yz} &= 0,\\
(X - x) f''_{xy} + (Y - y) f''_{yz} + (Z - z) f''_{z^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Ces plans doivent passer par une même droite; il faut que le déterminant de leurs coefficients soit nul ou que

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime précisément que le cône des tangentes est décomposé en deux plans. La droite commune à ces deux plans est la tangente à la ligne double.

En résumé, en un point double d'une surface, toute droite passant par ce point coupe la surface en deux points confondus. Il y a une infinité de tangentes coupant la surface en trois points confondus, ce sont celles dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(1) \qquad (uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

L'équation aux λ des points d'intersection d'une tangente en un point double avec la surface se réduit à

$$\frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = 0.$$

Considérons, en particulier, les tangentes dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(2) \qquad (uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)}.$$

On a, pour déterminer une telle tangente, les deux équations (1) et (2), où les inconnues sont les trois quantités homogènes u, v, w; l'une est du deuxième, l'autre du troisième degré; et, par suite, il y a six tangentes, en général, satisfaisant à ces conditions.

Pour une quelconque de ces six tangentes, le premier coefficient non nul de l'équation en λ étant celui de λ^4 (en général), un quatrième point de l'intersection vient se réunir aux trois premiers. Donc il existe, en général, en un point double d'une surface, *six tangentes osculatrices* ayant en commun avec la surface quatre points confondus avec le point double.

Si la surface est du troisième degré et possède un point double, ces six tangentes particulières, ayant quatre points communs avec la surface, sont situées tout entières sur la surface. Donc, *si une surface du troisième degré a un point double, elle contient six droites passant par le point double.*

Il pourrait arriver que l'équation (2) fût une conséquence de l'équation (1). Dans ce cas, pour toute tangente à la surface au point double, le coefficient de λ^3 s'annulerait et toute tangente serait osculatrice. On pourrait alors choisir les paramètres directeurs de la tangente de façon à annuler le coefficient de λ^4

$$\frac{1}{4!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(4)}.$$

On aurait alors deux équations en u, v, w du deuxième et du troisième degré qui détermineraient quatre tangentes *surosculatrices,* coupant la surface en quatre points confondus.

Nous n'insisterons pas sur cette singularité.

Intersection de la surface et d'un plan passant par un point double. — Soit

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

l'équation du plan passant par le point double $M(x, y, z)$. Une droite quelconque de ce plan a pour équation

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w} = \lambda,$$

avec la condition

$$au + bv + cw = 0,$$

et coupe la surface (et par suite sa section par le plan donné) aux points dont les λ sont racines de l'équation

$$f(x, y, z) + \frac{\lambda}{1}(uf'_x + vf'_y + wf'_z) \\ + \frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \ldots = 0;$$

or,

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

puisque le point xyz est un point double de la surface. Cette équation a toujours deux racines nulles.

Donc, toute droite passant par le point double M et située dans le plan de la surface y coupe la section en deux points confondus : *toute section de la surface par un plan passant par* M *est un point double de la section.*

Si l'on choisit la droite telle que

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0,$$

c'est-à-dire si on la prend sur le cône des tangentes, elle coupe l'intersection en trois points confondus en M et, par suite, *les deux tangentes à la section en* M *sont les intersections du plan tangent et du cône des tangentes.*

Si le cône des tangentes est imaginaire, les tangentes à la section sont imaginaires et la section a nécessairement au point un point double isolé.

Si le cône des tangentes est réel, les tangentes à la section peuvent être réelles ou imaginaires, et la section peut présenter un point double réel ou isolé. Si le plan sécant est tangent au cône des tangentes, les deux tangentes à la section sont confondues et la section présente un point de rebroussement. Le plan est dit alors *tangent* à la surface au point double M; et l'on voit que :

Tout plan tangent à une surface en un point double coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement.

Ces résultats restent vrais si le cône des tangentes est décomposé en deux plans. Les plans tangents à ce cône sont alors remplacés par les plans passant par la droite commune aux deux plans. Si les plans sont imaginaires, toute section plane passant par le point double y présente un point double isolé : *sauf les sections par des plans passant par la droite réelle commune aux deux plans, qui ont un point de rebroussement.* Un exemple de cette singularité est fourni par la surface engendrée par la révolution d'une parabole semi-cubique autour de sa tangente de rebroussement; c'est la surface déjà citée plus haut :

$$z^3 = x^2 + y^2.$$

Si les plans tangents sont réels, les sections par des plans quelconques passant par le point double y présentent un point double réel, sauf par ceux qui passent par la droite d'intersection des deux plans, lesquels présentent un rebroussement.

Si les deux plans tangents sont confondus, les sections par des plans passant par le point double y présentent toutes un point de rebroussement; un tel point sera dit *point de rebroussement de la surface.*

Reste à voir comment les deux plans tangents eux-mêmes coupent la surface. Les plans tangents forment le lieu des droites telles que

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0;$$

toute droite tracée dans l'un de ces plans annule le coefficient de λ^2 dans l'équation en λ

$$\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = 0.$$

Cette équation a trois racines nulles et une droite quelconque, tracée dans un des plans tangents, et passant par le point double M, coupe la section par ce plan en trois points confondus au moins. *La section par un des deux plans tangents coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple au moins.*

Pour obtenir les tangentes, il faut écrire qu'un quatrième point d'intersection de la droite et de la section vient se confondre avec M; c'est-à-dire que l'équation a une quatrième racine nulle, ou que le coefficient de λ^3 est nul :

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0.$$

C'est l'équation qui détermine les tangentes osculatrices. Donc :

Les tangentes à la section par un des plans tangents en un point double à cône de tangentes décomposé sont trois des six tangentes osculatrices et il y a trois de ces tangentes dans chacun des deux plans.

Si l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0$$

était une conséquence de l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0,$$

la section par un de deux plans tangents présenterait un point quadruple. Plus généralement elle pourrait présenter un point multiple d'ordre quelconque.

Remarque. — On désignera les points doubles à cônes de tangentes sous le nom de *points coniques;* ceux à deux plans tangents sous le nom de *points doubles;* ceux à un point tangent sous le nom de *point de rebroussement.*

Points multiples. — Il peut arriver, plus généralement, que, par un point $M(x, y, z)$ de la surface, toutes les dérivées successives d'ordre $1, 2, \ldots, (p-1)$ s'annulent. L'équation aux λ des points d'intersection de la surface et d'une droite passant par M se réduit à

$$\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} + \frac{\lambda^{p+1}}{(p+1)!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} + \ldots = 0,$$

et a p racines nulles. Une droite quelconque passant par M y coupe la surface en p points confondus. Le point est dit *multiple d'ordre p.*

En nommant tangente en M une droite passant par M et y coupant la surface en $(p+1)$ points confondus, on trouve alors un cône d'ordre p lieu de tangentes, ces tangentes étant définies par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} = 0,$$

et $p(p+1)$ tangentes osculatrices définies par l'équation précédente et l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} = 0.$$

Le cône des tangentes pourra se décomposer, et comprendre un certain nombre de plans.

On verrait, comme précédemment, que :

1° La section par un plan quelconque passant par M présente en M un point multiple d'ordre p, les p tangentes étant les génératrices d'intersection de son plan et du cône des tangentes.

2° La section par un plan tangent au cône des tangentes présente un point multiple d'ordre p, deux des p tangentes étant confondues, de sorte que deux des p branches de courbe se réunissent et leur ensemble prend l'aspect d'un point d'inflexion. Si le cône présente des génératrices doubles, il faut ajouter aux plans tangents ceux passant par ces génératrices.

3° Si le cône se décompose et comprend un plan, ce plan coupe la surface suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre $p + 1$, les tangentes étant $p + 1$ des tangentes osculatrices, qui se trouvent alors dans ce plan.