MAURICE FRÉCHET

Sur deux suites remarquables de polynômes et de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 538-542

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__538_1>

[D1b]

SUR DEUX SUITES REMARQUABLES DE POLYNOMES ET DE COURBES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Weierstrass a démontré que toute fonction $f(x)$ continue entre o et 1 peut être considérée comme la limite uniforme d'une suite infinie de polynomes de degrés croissants :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} (a_0^n + \ldots + a_n^n x^n).$$

On peut, si l'on veut, s'arranger pour que les coefficients de ces polynomes soient des nombres rationnels. En effet, remplaçons en général a_p^n par $\frac{\alpha_p^n}{n 2^p}$, α_p^n étant la partie entière du nombre $n \cdot 2^p \cdot a_p^n$. L'erreur commise sur le polynome de rang n sera moindre en valeur absolue que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\frac{x}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^p+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$<\frac{1}{n}\left[1+\frac{x}{2}+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right).$$

Et, comme x est compris entre o et 1, l'erreur est plus petite que $\frac{2}{n}$. Par suite, cette erreur tend vers zéro quand n croît indéfiniment, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha_0^n}{n}+\ldots+\frac{\alpha_n^n}{n2^n}x^n\right) \\ &= \lim_{n=\infty}\frac{\beta_0^n+\ldots+\beta_n^n x^n}{n2^n} \\ &= \lim_{n=\infty} R_n(x), \end{aligned}$$

la convergence étant uniforme.

On voit qu'*à chaque* fonction continue $f(x)$, on peut faire correspondre une certaine suite de polynomes R_1, R_2, ... Je dis qu'on peut tirer tous ces polynomes R_n d'une même suite de polynomes S_1, S_2, ... *indépendante de la fonction* $f(x)$. Cela est évident d'après la théorie des ensembles dénombrables, mais il est bien facile de le démontrer directement. En effet, prenons d'abord tous les polynomes R_n qui correspondent à la même valeur de n. Chacun d'eux est déterminé par les n nombres entiers β_0^n, ..., β_n^n, et il y en a seulement un nombre fini qui soient tels que la somme

$$s=|\beta_0^n|+\ldots+|\beta_n^n|$$

soit inférieure à un nombre donné quelconque. Nous pourrons alors numéroter (dans un ordre quelconque) tous les polynomes R_n tels que l'on ait $s=1$, puis numéroter à la suite ceux pour lesquels $s = 2$, ... On arrivera ainsi à ranger tous les polynomes R_n correspondant à la même valeur de n en une suite :

$$Q_n^1, \quad Q_n^2, \quad \ldots, \quad Q_n^p, \quad \ldots$$

Mais, maintenant, numérotons avec un seul indice tous les polynomes Q_n^p tels que $n+p$ soit inférieur à 2, 3, ... On arrivera finalement à une suite de polynomes à coefficients rationnels

$$S_1(x), \quad S_2(x), \quad \ldots, \quad S_q(x), \quad \ldots$$

qui comprend tous les polynomes R_n possibles.

Ainsi, *il existe une suite énumérable* (Σ) *de polynomes* S_1, S_2, ... *qui jouit de la propriété suivante :*

Toute fonction $f(x)$ *continue entre* 0 *et* 1 *est la limite uniforme d'une suite de polynomes convenablement extraite de la suite* (Σ).

Autrement dit, on peut écrire :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} S_{q_n}(x),$$

en désignant par q_1, q_2, ..., q_n, ... une suite [variant avec $f(x)$] de nombres entiers croissants ([1]).

On peut énoncer la même proposition sous une autre forme. Posons

$$P_1(x) = S_1(x), \qquad P_q(x) = S_q(x) - S_{q-1}(x),$$

et considérons la série

$$\text{(T)} \qquad P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots$$

([1]) On a ainsi une preuve effective de ce fait connu que toute fonction continue peut être définie par une suite infinie de nombres entiers.

Si l'on groupe ainsi

$$(P_1 + \ldots + P_{q_1}) + (P_{q_1+1} + \ldots + P_{q_2}) + \ldots$$
$$+ (P_{q_{n-1}+1} + \ldots + P_{q_n}) + \ldots$$

les termes de la série T, on obtient précisément une série dont la somme des n premiers termes est S_{q_n} quel que soit n.

Donc, *il existe une série* T *dont tous les termes sont des polynomes choisis une fois pour toutes et qu'on peut faire converger uniformément vers n'importe quelle fonction continue entre* o *et* 1, *en groupant à chaque fois de façon convenable les termes de cette série.*

Application aux courbes continues. — Une courbe continue est une courbe C qui peut être représentée par des formules telles que

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

f, g, h étant trois fonctions continues de o à 1.

On dit qu'une courbe continue C_n

$$x = f_n(t), \qquad y = g_n(t), \qquad z = h_n(t)$$

tend vers la courbe C quand n croît indéfiniment si

$$|f - f_n|, \quad |g - g_n|, \quad |h - h_n|$$

tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Ceci étant, considérons les courbes unicursales $C_{p,q,r}$:

$$x = S_p(t), \qquad y = S_q(t), \qquad z = S_r(t);$$

les fonctions S_p, S_q, S_r étant trois quelconques des polynomes définis plus haut.

Quelle que soit la courbe C, on peut écrire des égalités de la forme

$$f(t) = \lim_{n=\infty} S_{p_n}(t),$$

$$g(t) = \lim_{n=\infty} S_{q_n}(t),$$

$$h(t) = \lim_{n=\infty} S_{r_n}(t).$$

Autrement dit, la courbe C est la limite d'une suite infinie de courbes

$$C_{p_1, q_1, r_1}, \quad C_{p_2, q_2, r_2}, \quad \ldots, \quad C_{p_n, q_n, r_n}, \quad \ldots.$$

Mais, en employant la même méthode que pour les polynomes Q_n^p, on peut ranger toutes les courbes $C_{p,q,r}$ en une seule suite

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n, \quad \ldots.$$

Donc :

On peut former une suite infinie de courbes unicursales $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ jouissant de la propriété suivante :

Toute courbe continue est la limite d'une suite infinie de courbes

$$\Gamma_{m_1}, \quad \Gamma_{m_2}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{m_n}, \quad \ldots,$$

convenablement extraite de la suite primitive

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots.$$