Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 518-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__518_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1987.

(1903, p. 576.)

Si les segments aa', bb', cc' sont en involution, ainsi que les segments aa'', bb'', cc'', les points a, b, c auront le même conjugué dans les trois involutions respectivement déterminées par les segments $b'c''$ et $c'b''$, $c'a''$ et $a'c''$, $a'b''$ et $b'a''$. (A. Tissot.)

SOLUTION

Par M. R. B.

On peut supposer que les points a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' appartiennent à une *conique* C. Il résulte de l'énoncé que les droites aa', bb', cc' concourent en un certain point ω, et que les droites aa'', bb'', cc'' concourent en un autre point ω_1. Désignons par p, q les points d'intersection de $\omega\omega_1$ avec C.

Le théorème de Pascal, appliqué à l'hexagone $bb'c''cc'b''$, montre que les couples de droites $(b'c'', c'b'')$, $(c''c, b''b)$, (cc', bb') se coupent respectivement en trois points en ligne droite. Le deuxième et le troisième de ces points sont respectivement ω_1 et ω. Par conséquent, l'involution déterminée par les couples (b', c'') et (c', b'') contient les points d'intersection de $\omega\omega_1$ avec C, c'est-à-dire les points p et q, comme points conjugués.

Soit m le conjugué de a dans cette involution. On a l'égalité entre rapports anharmoniques

$$(mc'pq) = (ab''qp).$$

Mais les points a, b'', q, p ont pour conjugués respectifs, dans l'involution de centre ω_1, a'', b, p, q. Donc

$$(ab''qp) = (a''bpq),$$

et, par suite,

$$(mc'pq) = (a''bpq) = (ba''qp).$$

Cela montre que m et b sont conjugués dans l'involution déterminée par les couples (c', a'') et (p, q). Mais cette involution contient le couple (a', c''). La proposition en vue est donc établie.

2005.

(1905, p. 48.)

On considère en un point M *d'une ellipse les deux normales obliques sous l'angle* α.

1° *Les produits des distances des foyers à chacune de ces normales sont les mêmes.*

2° *La somme de ces produits en deux points conjugués* M *et* M' *de l'ellipse est constante.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Désignons par d_1, d'_1 les distances des foyers F et F' à l'une des normales et par d_2, d'_2 les distances à l'autre normale.

1° La similitude des triangles donne

$$\frac{d_1}{d'_2} = \frac{\text{MF}}{\text{MF}'}, \qquad \frac{d_2}{d'_1} = \frac{\text{MF}}{\text{MF}'};$$

donc

$$d_1 d'_1 = d_2 d'_2.$$

2° Désignons par D, D' les distances des foyers à la bissectrice des normales et par Δ, Δ' leurs distances à la tangente à l'ellipse au point M. On a facilement

$$d_1 + d_2 = 2D \cos\alpha, \qquad d_2 - d_1 = 2\Delta \sin\alpha,$$
$$d'_1 + d'_2 = 2D' \cos\alpha, \qquad d'_1 - d'_2 = 2\Delta' \sin\alpha.$$

Multiplions membre à membre les deux premières relations puis les deux autres et retranchons

$$d_1 d'_1 = DD' \cos^2\alpha - \Delta\Delta' \sin^2\alpha,$$

or,

$$\Delta\Delta' = b^2 \qquad \text{et} \qquad DD' = c^2 \sin^2\varphi,$$

φ étant l'anomalie excentrique du point M.

En M', on a

$$\delta_1 \delta'_1 = c^2 \cos^2\varphi \cos^2\alpha - b^2 \sin^2\alpha;$$

donc

$$d_1 d'_1 + \delta_1 \delta'_1 = c^2 \cos^2\alpha - 2b^2 \sin^2\alpha.$$

Remarque. — On aperçoit d'autres relations telles que

$$(d_2 - d_1)(d'_1 - d'_2) = 4b^2 \sin^2\alpha,$$
$$d_2 d'_1 + d_1 d'_2 + \delta_2 \delta'_1 + \delta_1 \delta'_2 = 2c^2 \cos^2\alpha + 4b^2 \sin^2\alpha.$$

2013.

(1905, p. 192.)

Un cercle a pour centre le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle donné et il est tangent à l'hypoténuse de ce triangle; les coniques qui ont pour foyers les extrémités de cette hypoténuse, et qui touchent le cercle, ont pour points de contact les sommets d'un triangle équilatéral. (MANNHEIM.)

SOLUTION

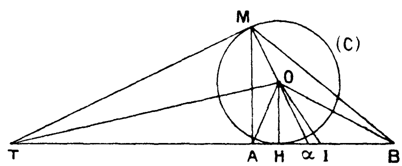
Par M. R. B

Soient

AOB le triangle donné, rectangle en O;
OH sa hauteur;
(C) le cercle de centre O et de rayon OH;

M le point de contact de (C) et d'une conique ayant pour foyers A et B;
α le point de rencontre de MO et de AB;
I le milieu de AB;
T le point de rencontre de AB et de la tangente à (C) en M.

MO est une bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ (intérieure dans le



cas de la figure); les quatre points T, A, α, B forment donc une division harmonique et l'on a

$$I\alpha.IT = \overline{IA}^2 = \overline{IO}^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{I\alpha}{IO} = \frac{IO}{IT}.$$

Il en résulte que les triangles $I\alpha O$, IOT sont semblables. On a donc

$$\widehat{IO\alpha} = \widehat{ITO} = \frac{\widehat{HTM}}{2} = \frac{\widehat{\alpha OH}}{2},$$

et, par suite,

$$\widehat{IO\alpha} = \frac{\widehat{IOH}}{3}.$$

La droite $O\alpha$ se construira donc par trisection de l'angle $\widehat{IOH}$. Mais ce dernier problème a trois solutions, les droites correspondantes $O\alpha_1$, $O\alpha_2$, $O\alpha_3$ faisant deux à deux des angles de 130°. De là résulte la propriété énoncée.

Remarque. — Le lieu du pied des normales abaissées du point O sur les coniques ayant pour foyers A et B est une strophoïde, dont le point double est O et dont le sommet est H. On peut donc énoncer la proposition suivante, dont la démonstration directe est d'ailleurs bien simple :

Le cercle qui a pour centre le point double d'une stro-

phoïde et qui passe par le sommet de cette courbe la rencontre en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

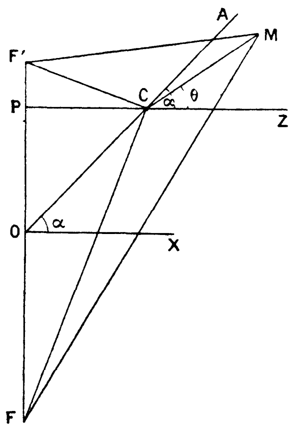
AUTRE SOLUTION

Par M. C.-A. L.

Soient

CFF' le triangle rectangle;
O le milieu de FF';
CP la hauteur, rayon du cercle;
α l'angle XOC que forme OCA avec PC;
M l'un des points de contact du cercle avec l'une des coniques.

Il s'agit de trouver un point M tel que CM = PC, et que CM



soit bissectrice de FMF'. Prenons pour unité la longueur

$$OC = OF = OF'.$$

Celle de PC = CM est alors $\cos\alpha$. Si θ est l'angle ZCM de CM avec PC, on a les équipollences

$$\begin{aligned} F'M &= \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\theta}\cos\alpha - i, \\ FM &= \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\theta}\cos\alpha + i, \\ CM &= \varepsilon^{\theta}\cos\alpha. \end{aligned}$$

La condition à laquelle il faut satisfaire est que F′M.FM soit parallèle à CM^2, ou

$$(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^\theta \cos\alpha)^2 + 1 \parallel \varepsilon^\theta,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon^{2\alpha} + 1 + 2\varepsilon^{\theta+\alpha}\cos\alpha \parallel \varepsilon^{2\theta}.$$

Mais

$$\varepsilon^{2\alpha} + 1 = \varepsilon^\alpha(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{-\alpha}) = 2\varepsilon^\alpha\cos\alpha.$$

Il vient donc

$$1 + \varepsilon^\theta \parallel \varepsilon^{2\theta-\alpha} \qquad \text{ou} \qquad 2\cos\frac{\theta}{2}\,\varepsilon^{\frac{\theta}{2}} \parallel \varepsilon^{2\theta-\alpha}.$$

On satisfait à cette condition, soit par

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0, \qquad \theta = \pi,$$

ce qui donne pour le point de contact P, correspondant à la conique dégénérée FF′, soit par l'égalité

$$2\theta - \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{2}{3}\alpha, \qquad \theta' = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2\pi}{3}, \qquad \theta'' = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4\pi}{3}.$$

On voit donc que les trois points M forment un triangle équilatéral.

On constate en même temps qu'en formant l'angle

$$\text{ACM} = \frac{1}{3}\,\text{ACZ},$$

on obtient l'une des solutions.

2016.

(1905, p. 240.)

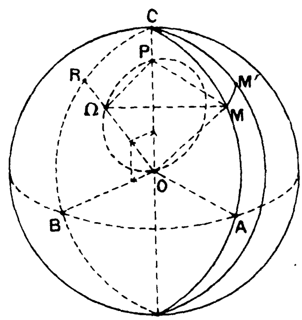
Si l'on considère toutes les loxodromies passant en un point M *d'une sphère et si, pour chacune d'elles, on prend le centre de courbure correspondant au point* M, *le lieu de* *ces centres de courbure est un cercle situé dans le méridien perpendiculaire à celui du point* M.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par UN ANONYME.

Soit M un point de la sphère, M′ un point voisin sur une loxodromie. On peut faire coïncider les deux méridiens et sur ces méridiens les points M et M′ par deux rotations, autour de OC, et de OB (perpendiculaire au méridien). Il est clair



que les tangentes en M et M′ viendront ainsi en coïncidence, et par suite les plans normaux.

Je veux démontrer que la caractéristique du plan normal est dans le plan COB.

Les deux rotations se réduisent à une seule autour d'un axe OΩ situé dans le plan BOC. Cet axe étant perpendiculaire à MM′ et passant par O est contenu dans le plan normal. Il en est donc la caractéristique.

Le centre de courbure se trouve sur le cercle décrit sur OP comme diamètre, P étant la projection de M, OΩ étant la trace du plan normal est perpendiculaire à la projection de la tangente en M. Cette projection est donc ΩP. Le cercle osculateur est le cercle de section de la sphère par le plan PΩM.

La réciproque de la proposition est vraie. Toute famille de courbes jouissant de la propriété est du genre loxodromie dans le voisinage du point M.

On peut rattacher le problème à une question de Géométrie plane. Prenons la figure inverse par rapport au point C. Les loxodromies demeurent des spirales logarithmiques. Le cercle osculateur à ces spirales est la transformée du cercle de centre Ω dont le plan est perpendiculaire au plan COB. Il a donc son centre dans ce plan, et l'on voit que toutes les spirales passant par un point du plan ont leur centre de courbure en ligne droite, à 90° du rayon vecteur.

Il était d'ailleurs facile de le voir directement et de remonter à la propriété des loxodromies.

En général, à une famille de courbes passant par M correspond une courbe tracée sur la sphère de diamètre OM qui est le lieu du cercle osculateur. Il n'y a que pour les loxodromies que cette courbe soit plane. Il suffit pour le voir de changer les pôles de la sphère; le point P restant toujours la projection de M sur le plan, et la ligne des pôles passant par P.

Autre solution de M. Parrod.

2017.

(1905, p. 240.)

Si une cubique gauche et une quadrique admettent un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique, on sait qu'elles en admettent une infinité. Démontrer que le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une cubique gauche. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Supposons la cubique représentée en coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = \frac{A(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$y = \frac{B(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$z = \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)},$$

les polynomes en λ étant du troisième degré. Soit D un point de la cubique; son plan polaire par rapport à la quadrique coupe la cubique en trois points A, B, C, qui forment avec D un tétraèdre de l'espèce indiquée. Les valeurs de λ aux points A, B, C, D étant α, β, γ, δ, on a entre α et δ une relation de la forme

$$\alpha^3 f(\delta) + \alpha^2 \varphi(\delta) + \ldots = 0,$$

les polynomes f, φ, ... étant du troisième degré, et, si δ est donné, on a une équation en α dont les racines sont α, β, γ.

Les coordonnées des points A, B, C étant (x', y', z'), (x'', y'', z''), ..., on a

$$\begin{aligned} x' + x'' + x''' &= \frac{A(\alpha)}{D(\alpha)} + \frac{A(\beta)}{D(\beta)} + \frac{A(\gamma)}{D(\gamma)} \\ &= \frac{A(\alpha)\,D(\beta)\,C(\gamma) + \ldots}{D(\alpha)\,D(\beta)\,D(\gamma)} \\ &= \frac{F(\delta)}{\Phi(\delta)}, \end{aligned}$$

F et Φ étant du neuvième degré. On en conclut pour les coordonnées du centre de gravité G

$$(1) \qquad x = \frac{R(\delta)}{V(\delta)}, \qquad y = \frac{S(\delta)}{V(\delta)}, \qquad \ldots,$$

les polynomes en δ étant du douzième degré. Les points G situés dans un plan donné correspondent donc à des points D en nombre égal à 12, à des tétraèdres en nombre égal à 3, de sorte qu'il y a trois points G dans un plan quelconque; le lieu du point G est dès lors une cubique gauche.

[Si k est un paramètre qui correspond uniformément au point G sur la cubique qu'il décrit, les valeurs de λ aux points A, B, C, D sont données par une équation de la forme

$$M(\lambda) + k\,N(\lambda) = 0,$$

M et N étant du quatrième degré. Comme on a pour les coordonnées du point G

$$x = \frac{r(k)}{v(k)}, \qquad y = \frac{s(k)}{v(k)}, \qquad \ldots,$$

les polynomes en k étant du troisième degré, on voit que l'on obtiendrait les formules (1), avec λ au lieu de δ, en substituant à k son expression en λ.]

2018.

(1905, p. 240.)

Soit $P^{(m)}$ *une parabole générale d'ordre* m .

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m.$$

Si, sur la parabole $P^{(2n)}$, *on prend les points* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *dont les abscisses croissent en progression arithmétique et si l'on fait passer par ces points une* $P^{(2n+1)}$ *quelconque, l'aire comprise entre ces deux courbes depuis le point* A_0 *jusqu'au point* A_{2n} *est algébriquement nulle.*

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Si l'on désigne par h l'abscisse du point A_0, l'équation générale des paraboles $P^{(2n+1)}$, satisfaisant aux conditions de l'énoncé, est

$$Y = y + a(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2n+1)h],$$

a étant un paramètre et $y = 0$ l'équation de la parabole $P^{(2n)}$ considérée.

Il faut donc démontrer que l'intégrale définie

$$\begin{aligned} I &= \int_h^{(2n+1)h} (Y - y)\, dx \\ &= a\int_h^{(2n+1)h} (x-h)(x-2h)\ldots[x-(2n+1)h]\, dx \end{aligned}$$

est nulle.

Posons

$$x = h[(n+1)+z],$$

z étant une nouvelle variable, I s'écrit

$$I = ah^{2(n+1)} \int_{-n}^{+n} z(z^2-1)(z^2-4)\ldots(z^2-n^2)\, dz.$$

Pour des valeurs de x égales et de signe contraire, le polynome sous le signe $\int$ prenant des valeurs égales et de signes contraires, on en conclut que l'intégrale I est nulle. Ce qui démontre la proposition.

Autre solution par M. PARROD.