G. FONTENÉ

Extension du théorème de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 504-506

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__504_1>

[K2c]

EXTENSION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soit un triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle pédal d'un point D, ou, comme nous dirons, le cercle pédal d'un point D passe au centre P de l'hyperbole équilatère ABCD. Deux points inverses D et D′ ont même cercle pédal; celui-ci rencontre le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points P et P′, qui sont les centres des deux hyperboles équilatères ABCD, ABCD′. Si la droite DD′ passe au point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, les points D′ et D sont sur la conique circonscrite au triangle ABC qui est l'inverse de cette droite, conique qui est une hyperbole équilatère puisqu'elle renferme l'orthocentre H, inverse du point O; les deux hyperboles équilatères ABCD et ABCD′ sont alors confondues, les points P et P′ sont confondus, et le cercle pédal est tangent au cercle des neuf points. Ainsi :

Étant donné un triangle ABC, *si deux points inverses* D *et* D′ *sont en ligne droite avec le centre* O *du cercle circonscrit, le cercle pédal auquel ils donnent lieu est tangent au cercle des neuf points.*

Ce théorème a été donné sous une autre forme par

M. Weill, en considérant la conique de foyers D et D′ inscrite au triangle, et en employant des relations métriques (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 259, th. XVI).

2. Si le point D décrit une droite passant en O, le point D′ décrit une hyperbole équilatère passant en A, B, C, et le cercle pédal du point D passe par un point fixe P′, centre de cette hyperbole, point situé sur le cercle des neuf points du triangle ABC.

Pour déterminer simplement le point P′ qui correspond à une droite passant par O, considérons les points d'intersection D_1 et D_2 de cette droite avec le cercle ABC. Le cercle pédal du point D_1 est remplacé par une droite, droite de Simson, que l'on peut construire comme il suit (le lecteur est prié de faire la figure) : on mène D_1E_1 perpendiculaire à BC, on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en F_1 avec le cercle O, on trace AF_1, et l'on mène par E_1 une parallèle à cette droite ; on opère de même pour le point D_2 ; les deux droites de Simson, rectangulaires, se coupent en P′. Observons que le point M, milieu de BC, est milieu du segment E_1E_2, de sorte que la droite MP′ est médiane du triangle $E_1P'E_2$.

Supposons maintenant que la droite OD tourne autour de O d'un angle α ; D_1 parcourt un arc D_1d_1, F_1 parcourt un arc F_1f_1 égal et de sens contraire, la droite AF_1 tourne de l'angle $-\frac{\alpha}{2}$, il en est de même de la droite de Simson E_1P', et la médiane MP′ tourne de l'angle $-\alpha$. Si Ω est le centre du cercle des neuf points, le rayon $\Omega P'$ tourne de l'angle -2α. Ainsi :

Étant donné un triangle ABC, *si un point* D *décrit une droite passant au centre* O *du cercle circonscrit, le cercle pédal du point* D *passe par un point fixe* P′, *point situé sur le cercle des neuf points du triangle*

ABC. *Si cette droite tourne d'un certain angle autour du point* O, *le rayon* $\Omega P'$ *du cercle des neuf points tourne en sens contraire d'un angle double.*

On a cette conséquence immédiate :

Si D *et* D' *sont deux points inverses, le cercle pédal commun rencontre le cercle des neuf points en deux points* P *et* P', *et l'on a en grandeur et en signe*

$$\widehat{P\Omega P'} = 2(OD, OD'),$$

l'angle (OD, OD') étant déterminé à un multiple près de deux angles droits.