STUYVAERT

Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 481-504

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__481_0>

[$M^1 5 e\delta$, $M^1 6c$, $M^2 4$]

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS CERTAINES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. STUYVAERT.

(*Suite et fin.*)

FIGURES DU QUATRIÈME DEGRÉ A TROIS ET QUATRE NOEUDS.

9. Tout le paragraphe précédent serait inexact si la condition $\Delta = 0$ équivalait à l'existence d'un troisième point double, car alors la propriété d'être quadrillée n'appartiendrait jamais à une quartique binodale. Mais il n'en est rien : admettons en effet que la courbe φ ait un troisième nœud au sommet $x_2 x_3$, ce qui revient à supposer

$$c_3 = c_2 = b_3 = 0.$$

Le déterminant Δ se réduit à $-a_3 b_2 c_1$ et n'est pas identiquement nul.

Réservons toujours les cas où l'on a, soit $a_3 = 0$, soit $c_1 = 0$, et où la courbe φ dégénère en une cubique et une droite x_2 ou x_3. Nous devons admettre $b_2 = 0$, et les tangentes

$$c_1 x_3^2 + 0 x_3 x_2 + a_3 x_2^2 = 0$$

au troisième nœud $x_2 x_3$ sont alors séparées harmoniquement par les deux autres points doubles. Ainsi, *pour qu'une quartique trinodale possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux des nœuds, il faut et il suffit que ceux-ci soient* *séparés harmoniquement par les tangentes au troisième nœud.*

Comme on le vérifie sans peine, la correspondance des sommets opposés des quadrangles est donnée par les relations

$$\begin{aligned} x''_1 : x''_2 : x''_3 = {} & a_2 b_1 (2 a_2 x'_3 + a_3 x'_1)(2 b_1 x'_2 + c_1 x'_1) \\ & : - a_2 b_1 c_1 x'_2 (2 a_2 x'_3 + a_3 x'_1) \\ & : - a_2 a_3 b_1 x'_3 (2 b_1 x'_2 + c_1 x'_1). \end{aligned}$$

C'est une inversion, dont les points fondamentaux sont les nœuds $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ et le point commun aux droites

$$2 a_2 x_3 + a_3 x_1 = 0, \qquad 2 b_1 x_2 + c_1 x_1 = 0.$$

Le troisième point diagonal des quadrangles décrit la conique

$$a_1 x_3 x_2 + b_1 x_3 x_1 + a_2 x_1 x_2 = 0;$$

elle ne dégénère que si l'un de ses coefficients s'annule, hypothèse que nous pouvons exclure provisoirement.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_3^2 & -2 a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 \\ x_2^2 & a_1 x_2^2 + 2 b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle montre les involutions projectives

$$\lambda x_3^2 - 2 a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 = 0,$$
$$x_2^2 (a_1 + \lambda) + 2 b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 = 0,$$

dont la première, combinée avec l'équation d'une droite u, donne cette troisième involution

$$\begin{aligned} & x_2^2 \lambda u_2^2 + 2 x_2 x_1 (\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3) \\ & \quad + x_1^2 (\lambda u_1^2 + 2 a_2 u_3 u_1 - a_3 u_3^2) = 0. \end{aligned}$$

La seconde et la troisième involution ont un couple commun si l'on a

$$\frac{\lambda u_2^2}{a_1+\lambda} = \frac{\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3}{b_1} = \frac{\lambda u_1^2 + 2 a_2 u_3 u_1 - a_3 u_3^2}{c_1}.$$

L'élimination de λ donne, après simplification par u_1, u_2, u_3, une équation cubique en u. Les conditions pour que les équations précédentes aient deux racines communes en λ donnent les tangentes doubles de l'enveloppe; elles conduisent à

$$\left\|\begin{matrix} u_2^2 & 0 & 1 & a_1 \\ u_2 u_1 & a_2 u_2 u_3 & 0 & b_1 \\ u_1^2 & 2a_2 u_3 u_1 - a_3 u_2^2 & 0 & c_1 \end{matrix}\right\| = 0;$$

en simplifiant par $u_1 u_3$, on obtient

$$c_1 u_2 = b_1 u_1, \qquad a_3 u_3 = a_2 u_1.$$

Cette tangente double joint deux points représentés respectivement par ces deux dernières relations; ils sont situés sur les côtés x_3 et x_2 du triangle de référence et sur les droites respectives

$$c_1 x_1 + b_1 x_2 = 0, \qquad a_3 x_1 + a_2 x_3 = 0,$$

c'est-à-dire sur les polaires de chacun des nœuds x_1, x_3 et x_1, x_2 relativement aux tangentes à l'autre.

Dans une quadrique trinodale quadrillée, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une conique et les diagonales de ces quadrangles enveloppent une courbe de troisième classe possédant une tangente double.

Dans les cas, exclus plus haut, où l'on a, soit $b_1 = 0$, soit $a_2 = 0$, les résultats, faciles à établir, se résument comme suit :

Un des nœuds est un point double d'inflexion; la *courbe a deux séries de quadrangles inscrits ayant des points diagonaux en deux couples de nœuds; pour chaque série de quadrangles, les sommets opposés se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire, le troisième point diagonal décrit une droite et les diagonales enveloppent une conique.*

Si l'on a simultanément $b_1 = 0$ et $a_2 = 0$, *il y a une série de quadrangles inscrits ayant leurs trois points diagonaux aux trois nœuds de la courbe; les sommets opposés de ces rectangles se correspondent dans une collinéation; les trois nœuds sont des points doubles d'inflexion. Et, chaque fois qu'une quartique a trois points doubles d'inflexion, elle est ainsi triplement quadrillée.*

10. Nous avons toujours exclu le cas où la courbe φ dégénère en une droite et une cubique. Examinons à présent cette hypothèse; choisissons la droite en question pour côté x_1 du triangle de référence, ce qui revient à faire $a_1 = 0$ dans l'équation φ. Les raisonnements précédents font découvrir, pour la cubique

$$x_3^2(2b_1x_2 + c_1x_1) + 2x_3(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) \\ + x_1(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0,$$

un certain nombre de propriétés, la plupart connues. Il nous suffira d'énoncer les résultats.

La cubique possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux points M *et* N *de la courbe,* choisis pour sommets x_1x_2 et x_1x_3 *si l'on a*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En écartant d'abord le cas où $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, on voit qu'on peut faire évanouir c_1 et a_3, car il suffit de prendre pour côtés du triangle de référence les tangentes en M et N. Alors, pour que Δ soit nul, il faut que c_3 le soit, donc que la courbe passe par le point P de rencontre des tangentes en M et N; ainsi *les deux points* M *et* N *ont même tangentiel* et, par raison de symétrie, *il en est de même de deux sommets opposés quelconques d'un quadrangle steinérien. Le troisième point diagonal des quadrangles parcourt une droite; leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe; leurs sommets opposés se correspondent dans une inversion ayant* M, N, P *pour points fondamentaux.*

L'hypothèse $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ correspond au cas où l'un des points M, N est un point d'inflexion; elle entraine quelques modifications faciles à énoncer.

11. Si, au lieu d'une quartique, on a un système de deux coniques circonscrites au triangle de référence,

$$(\alpha x_2 x_3 + \beta x_3 x_1 + \gamma x_1 x_2)(\alpha' x_2 x_3 + \beta' x_3 x_1 + \gamma' x_1 x_2) = 0,$$

les raisonnements du n° 9 s'appliquent : pour qu'il y ait des quadrangles inscrits à deux points diagonaux aux nœuds $x_1 x_2$ et $x_1 x_3$, il faut que le terme en $x_1^2 x_2 x_3$ manque dans l'équation ci-dessus, ou que l'on ait

$$\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\beta'}{\gamma'},$$

et les tangentes aux deux coniques en leur troisième point commun $C(x_2 = 0, x_3 = 0)$ doivent être séparées harmoniquement par les deux premiers points A et B. Evidemment la même propriété doit exister pour les tangentes au quatrième point commun D.

D'après cela, les coniques données Γ_2 et Γ'_2, appartenant au faisceau de coniques de base ABCD, y sont séparées harmoniquement par les couples de droites AC, BD et AD, BC. Par suite les tangentes à Γ_2 et Γ'_2 en A (ou B) sont séparées harmoniquement par C et D; donc il y a un second système de quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Le pôle de AB par rapport à la conique Γ_2 a pour coordonnées

$$-\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

Sa polaire relative à Γ'_2 est

$$-\alpha(\beta' x_3 + \gamma' x_2) + \beta(\alpha' x_3 + \gamma' x_1) + \gamma(\alpha' x_2 + \beta' x_1) = 0$$

ou, à cause de $\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0$,

$$x_2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + x_3(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0.$$

Cette droite n'est autre que CD, car son équation s'obtient aussi en éliminant le terme en $x_2 x_3$ des équations des deux coniques.

Il y a donc un point $M(-\alpha, \beta, \gamma)$ qui est à la fois pôle de AB pour Γ_2 et pôle de CD pour Γ'_2; et pareillement un point analogue $N(-\alpha', \beta', \gamma')$, pôle de AB pour Γ'_2 et de CD pour Γ_2.

Le troisième point diagonal des quadrangles inscrits à points diagonaux en A et B décrit la conique

$$2\alpha\alpha' x_2 x_3 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x_1 x_2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) x_1 x_3 = 0.$$

Elle passe par A, B, C, donc aussi par D; elle passe par M et N, et, dans le faisceau des coniques ayant pour base ABCD, elle est harmoniquement séparée du couple de droites AB, CD par les coniques proposées Γ_2 et Γ'_2. Elle est aussi le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Deux sommets opposés d'un quadrangle inscrit, de la première série par exemple, sont toujours sur une même conique Γ_2 ou Γ'_2. Ceux qui sont sur Γ_2 sont projetés de A suivant une involution dont AC et AD sont les rayons doubles; donc ces couples de sommets sont en involution sur la conique et sont alignés sur le pôle N de CD. Ainsi l'enveloppe des diagonales des quadrangles se réduit aux deux points M et N.

Les deux coniques se correspondent à elles-mêmes dans une inversion dont les points fondamentaux sont A et B et un troisième point E défini par les relations

$$\beta\beta' x_1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')x_2 = 0,$$
$$\gamma\gamma' x_1 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)x_3 = 0.$$

On vérifie très facilement que ce point est situé sur les droites CD et MN.

Pareillement les deux coniques se conservent dans une inversion ayant pour points fondamentaux C, D et l'intersection F de AB et MN.

De ces deux transformations, la première fait correspondre, sur Γ_2, deux sommets opposés d'un quadrangle de la première série, donc deux points x et y alignés sur N. Soit alors G l'intersection de AB et de CD et soient y et z deux points de Γ_2 alignés sur G; sur la conique Γ_2, les points x et z sont des éléments correspondants d'une involution, puisque N et G sont conjugués par rapport à la conique; le pôle de cette involution est le pôle de NG ou E; dans le plan, ces points x et z se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique; celle-ci est le produit de l'inversion ayant E, A, B pour points fondamentaux et de l'homologie ayant pour pôle G et pour axe MN ou EF. Dans cette transformation composée, les points fondamentaux de l'un des systèmes sont E, A, B et leurs homologues dans l'autre E, B, A; c'est donc une *transformation de Hirst.*

Il est facile d'écrire l'invariant simultané de deux coniques qui doit s'annuler quand ces courbes forment un système quadrillé; mais nous ne traiterons pas cette question ici.

12. Appliquons les résultats du numéro précédent à deux cercles se coupant en A et B. Pour qu'ils forment un système quadrillé, il faut que leurs tangentes en A (ou B) soient séparées harmoniquement par les points cycliques, ou soient rectangulaires.

Ainsi, *deux cercles* C_1 *et* C_2 *se coupant à angle droit ont des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux aux points cycliques.*

Pour former un tel quadrangle, il faut prendre un point P de C_1, le joindre aux points cycliques; on obtient deux droites imaginaires (isotropes) coupant le cercle C_2 en deux points imaginaires I et I′ situés sur l'axe radical du cercle C_2 et du cercle nul P. Les points I′ et I, joints à leur tour aux points cycliques, donnent deux autres droites imaginaires se coupant en un point réel Q de C_1. Les cercles nuls P et Q ont, avec C_2, même axe radical et sont alignés sur le centre de ce cercle. L'étude actuelle conduit donc à cette propriété connue : *tout cercle* C_1 *passant par les points limites* P *et* Q *d'un faisceau de cercles coupe orthogonalement tous les cercles de ce faisceau.*

En interprétant la transformation de Hirst rencontrée ci-dessus, on trouve ce théorème de Géométrie élémentaire :

Soient deux cercles se coupant à angle droit, P *et* Q *deux points de l'une des circonférences ali-*

gnés sur le centre de l'autre, P′ *le symétrique de* P *par rapport à la ligne des centres;* P′ *et* Q *se correspondent dans une transformation par vecteurs réciproques ayant pour pôle le milieu de la corde commune.*

Les deux cercles C_1 et C_2 ont aussi des quadrangles inscrits à deux points diagonaux en A et B, ce qui conduit à cette autre propriété :

Dans deux cercles se coupant à angle droit, on peut inscrire une infinité de quadrangles ayant deux points diagonaux aux points communs A *et* B *des cercles; les sommets opposés de chaque quadrangle sont aux extrémités d'un diamètre d'un cercle; le troisième point diagonal des quadrangles décrit la circonférence passant par* A, B *et par les centres des cercles donnés.*

Ici se termine ce que nous voulions exposer des quartiques planes quadrillées; nous espérons consacrer un autre travail aux intersections mutuelles de courbes pareilles et aux propriétés de leurs tangentes en des couples de sommets opposés des quadrangles inscrits.

BIQUADRATIQUE GAUCHE DE PREMIÈRE ESPÈCE.

13. Soit c_4 une biquadratique gauche, intersection de deux quadriques, dans le cas le plus général. Cette courbe est projetée d'un point extérieur A, suivant un cône du quatrième ordre à deux génératrices doubles; la trace de ce cône sur un plan quelconque est une quartique binodale qui, moyennant une seule condition, est quadrillée; dans ce cas le cône perspectif à la courbe sera dit aussi *quadrillé*. Donc, *il existe une*

double infinité de cônes quadrillés perspectifs à la biquadratique.

Considérons le cône quadrillé de sommet A : il existe, sur c_4, une infinité simple de quadrangles tels que deux côtés opposés rencontrent une bisécante AO issue de A, tandis que les deux autres côtés rencontrent la seconde bisécante AO′; mais AO et AO′ sont deux génératrices de la quadrique F passant par A et par c_4; donc les couples de côtés opposés de ces quadrangles sont aussi des génératrices de l'un et de l'autre système de F. Or, cette propriété est connue; la surface F est alors une des six *quadriques de Voss* du faisceau ayant pour base c_4.

Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche de la première espèce se compose des six quadriques de Voss du faisceau ayant pour base la courbe donnée.

En appliquant la méthode des projections centrales aux propriétés exposées antérieurement pour les quartiques et les cubiques quadrillées, nous aurions pu retrouver le nombre de ces quartiques et leurs principales propriétés, notamment celle-ci, qui est connue et a été établie par l'emploi des fonctions elliptiques :

Dans le faisceau $F + kF'$ *ayant pour base la courbe* c_4, *il y a quatre cônes définis par une forme du quatrième ordre en* λ; *les six quadriques de Voss sont définies par le covariant sextique de cette forme.*

On remarquera l'analogie de cette propriété avec celle de deux coniques formant un système quadrillé, d'être séparées harmoniquement par deux courbes dégénérées du faisceau qu'elles déterminent.

Nous n'insistons pas sur la théorie des quadriques de Voss, qui est trop connue. Énonçons seulement quelques résultats qui se déduisent très facilement de nos paragraphes antérieurs.

Les droites issues d'un point quelconque d'une quadrique de Voss et s'appuyant sur les couples de diagonales des quadrangles inscrits correspondants engendrent un cône du second degré.

Les diagonales de ces quadrangles engendrent une surface réglée de quatrième classe et de quatrième ordre ayant une développable bitangente de seconde classe.

Les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une collinéation.

BIQUADRATIQUE GAUCHE RATIONNELLE.

14. On sait que tout cône perspectif à cette courbe est du quatrième ordre et possède trois génératrices doubles.

Soit AB une bisécante de la courbe γ_4 et, s'il est possible, sur cette bisécante, un point P qui soit le sommet d'un cône quadrillé, de manière que deux côtés opposés de chaque quadrangle inscrit rencontrent PAB, les deux autres s'appuyant sur une autre bisécante PCD.

Les propriétés des quartiques quadrillées donnent, par projection, la condition pour que le point P réponde à la question : les plans tangents au cône (P) issus de PAB doivent toucher ce cône suivant deux génératrices situées dans un plan contenant PCD. Ou encore : si M et N sont les contacts des tangentes à γ_4 qui rencontrent PAB, il faut et il suffit que MN rencontre CD. Mais les bisécantes qui rencontrent MN engendrent une surface du troisième ordre contenant la courbe γ_4 et coupant PAB en un seul point P.

Soit ensuite Q un point de AB tel que le cône de sommet Q perspectif à la quartique soit quadrillé, mais de façon que les couples de côtés opposés des quadrangles inscrits rencontrent les deux autres bisécantes QEF, QGH issues de Q.

D'après un théorème établi plus haut, les plans tangents au cône (Q) le long de la génératrice double AB doivent séparer harmoniquement les plans (AB, EF) et (AB, GH). Or, ces plans tangents sont déterminés par AB et par les tangentes à γ_4 respectivement en A et B; les couples de plans séparés harmoniquement par ces deux plans tangents sont en involution quadratique. D'autre part, les plans déterminés par AB et par les seconde et troisième bisécantes issues d'un point variable de AB sont aussi des couples d'une involution quadratique ayant pour éléments doubles les plans qui contiennent les trisécantes issues de A et de B. Deux involutions ont un seul couple commun; il y a donc, sur AB, un seul point Q répondant à la question.

Toutefois, si la tangente en A à γ_4 rencontre encore la courbe, les deux involutions ont un élément double commun et n'en ont point d'autre; alors Q coïncide avec A. Et, si les tangentes en A et en B à γ_4 rencontrent encore la courbe, les deux involutions ont les mêmes éléments doubles et coïncident; alors, tous les points de AB sont des points Q.

En résumé, *sur une bisécante quelconque il y a, en général, deux points* P *et* Q, *sommets de cônes circonscrits quadrillés.*

Le lieu des sommets des cônes quadrillés est donc une certaine surface S qui peut contenir la quartique comme courbe multiple d'ordre x. Une bisécante coupe S en deux points simples et deux points x^{uples}; par suite, le degré de la surface est $2x + 2$. Une trisécante à trois appuis distincts ne peut pas rencontrer S en dehors de γ_4, d'où il résulte que le degré de la surface est aussi $3x$. Finalement x est égal à 2 et la surface S est du sixième ordre.

La courbe γ_4 possède, comme on sait, quatre tangentes qui la rencontrent encore; les six droites joignant deux à deux les contacts de ces tangentes sont tout entières sur S. Si A est un de ces contacts, une bisécante quelconque par A ne perce plus la surface qu'en un seul point P, car on a vu que le point Q coïncide avec A. Donc, ces quatre contacts sont des points triples de S. Les tangentes en ces points rencontrent la surface en un point double, un point triple et encore un point double infiniment voisin du point triple, ce qui équivaut à sept intersections; ces tangentes sont donc tout entières sur S.

Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche rationnelle est une surface du sixième ordre ayant la biquadratique comme courbe double, possédant quatre points triples aux contacts des tangentes qui rencontrent encore la courbe, et passant par ces tangentes et par les six droites qui joignent, deux à deux, les contacts de ces tangentes.

On sait que la biquadratique rationnelle possède trois cordes, les *cordes principales de Bertini,* qui sont chacune l'intersection des plans osculateurs à la courbe en leurs extrémités; ces cordes se coupent en un même point R. *Le point* R *est le sommet d'un cône triplement quadrillé perspectif à la courbe. C'est un point double de la surface* S.

SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE A CUBIQUE GAUCHE DOUBLE.

15. Le problème se pose tout naturellement de chercher, pour les surfaces du quatrième ordre, quelles sections planes sont des courbes quadrillées à deux ou trois nœuds. Si l'on considère la surface quartique la plus générale, la question est probablement fort difficile; mais elle se simplifie beaucoup et donne quelques résultats intéressants si l'on considère les surfaces douées de lignes singulières, par exemple la *surface de Steiner*, la quartique à deux droites doubles, etc.

A titre d'exemple, nous donnons ici quelques détails sur la surface du quatrième ordre S_4 ayant pour courbe double une cubique gauche représentée par les relations paramétriques

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1.$$

Si l'on pose

$$X_1 = x_2 x_4 - x_3^2, \qquad X_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4, \qquad X_3 = x_1 x_3 - x_2^2,$$

on sait que la surface considérée, la plus générale, a pour équation

$$a_X^2 \equiv \Sigma a_{ik} X_i X_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, 3).$$

Les ∞^3 sections planes sont des quartiques trinodales parmi lesquelles ∞^2 sont quadrillées. Les plans de ces dernières enveloppent une surface.

Pour trouver l'équation de cette surface, nous appliquons le *principe de translation de Clebsch*, un peu modifié. Un plan u sera défini par les trois points où il coupe la cubique double; soient θ_1, θ_2, θ_3 les paramètres de ces points généralement distincts. Un point quelconque du plan u a pour coordonnées

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= \lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3,\\
\rho x_2 &= \lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2,\\
\rho x_3 &= \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3,\\
\rho x_4 &= \lambda \quad + \mu \quad + \nu,
\end{aligned}$$

et λ, μ, ν sont, dans le plan u, les coordonnées du point x rapporté au triangle dont les sommets sont θ_1, θ_2, θ_3.

Portons les valeurs de x_i, d'abord dans les formes $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned}
\rho^2 X_1 &= (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)(\lambda + \mu + \nu)\\
&\quad - (\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3)^2\\
&= \Sigma\lambda\mu(\theta_1 - \theta_2)^2,\\
\rho^2 X_2 &= (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3)\\
&\quad - (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda + \mu + \nu)\\
&= \Sigma - \lambda\mu(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)^2,\\
\rho^2 X_3 &= (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda\theta_1 + \lambda\theta_2 + \nu\theta_3)\\
&\quad - (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)^2\\
&= \Sigma\lambda\mu\theta_1\theta_2(\theta_1 - \theta_2)^2.
\end{aligned}$$

La substitution dans l'équation $a_X^2 = 0$ donne le résultat symbolique suivant :

$$\{\Sigma(\theta_1 - \theta_2)^2\lambda\mu[a_1 - a_2(\theta_1 + \theta_2) + a_3\theta_1\theta_2]\}^2 = 0.$$

Pour que la section soit quadrillée avec des quadrangles ayant deux points diagonaux en θ_1 et θ_2, nous avons vu que le terme en $\lambda\mu\nu^2$ de l'équation précédente doit s'annuler; donc, si l'on fait abstraction du facteur étranger, généralement non nul, $(\theta_2 - \theta_3)^2(\theta_3 - \theta_1)^2$, on doit avoir

$$[a_1 - a_2(\theta_2 + \theta_3) + a_3\theta_2\theta_3][a_1 - a_3(\theta_3 + \theta_1) + a_3\theta_3\theta_1] = 0.$$

Développons, sous forme non symbolique,

$$a_{11} - a_{12}(\Sigma\theta_1 + \theta_3) + a_{13}(\theta_3\Sigma\theta_1 - \theta_3^2)$$
$$+ a_{22}(\Sigma\theta_1\theta_2 + \theta_3^2) - a_{23}(\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\Sigma\theta_1\theta_2)$$
$$+ a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3^2 = 0,$$

ou encore

$$a_{11} - a_{12}\Sigma\theta_1 + a_{22}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{23}\theta_1\theta_2\theta_3$$
$$- \theta_3(a_{12} - a_{13}\Sigma\theta_1 + a_{23}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3)$$
$$+ \theta_3^2(a_{22} - a_{13}) = 0,$$

en abrégé

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0,$$

n et p étant des fonctions symétriques de $\theta_1\theta_2\theta_3$.

Il est facile d'introduire les coordonnées du plan u, car on a

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -\Sigma\theta_1 : \Sigma\theta_1\theta_2 : -\theta_1\theta_2\theta_3;$$

appelons M, N, P ce que deviennent m, n, p quand on fait les substitutions; il vient

$$\mathrm{M} = m = a_{22} - a_{13},$$
$$\mathrm{N}u_1 = -(a_{12}u_1 + a_{13}u_2 + a_{23}u_3 + a_{33}u_4),$$
$$\mathrm{P}u_1 = \quad a_{11}u_1 - a_{12}u_2 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4.$$

L'équation $m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0$ devient alors

$$\mathrm{M}\theta_3^2 + \mathrm{N}\theta_3 + \mathrm{P} = 0.$$

Elle exprime une certaine *liaison* entre un plan u et un point θ_3 de la cubique; si, en outre, ce point est dans le plan u ou si l'on a

$$u_1\theta_3^3 + u_2\theta_3^2 + u_3\theta_3 + u_4 = 0,$$

le plan u est une section quadrillée. L'enveloppe de ces plans u se trouve un éliminant simplement θ_3 entre les deux dernières égalités. Le résultant est un déterminant à cinq lignes; mais les formes N et P contiennent u en dénominateur; pour chasser ce dénominateur, on multiplie les trois premières lignes du déterminant par u_1 et l'on divise ensuite la première colonne par u_1; on obtient

$$F_4 \equiv \begin{vmatrix} . & . & M u_1 & (N u_1) & (P u_1) \\ . & M u_1 & (N u_1) & (P u_1) & \ldots\ldots \\ M & (N u_1) & (P u_1) & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots\ldots \\ . & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une surface de quatrième classe. Elle est vérifiée pour $u_4 = (P u_1) = 0$, et ces deux relations représentent deux points; la droite qui les joint est donc tout entière sur F_4. Mais $u_4 = 0$ représente le sommet $(1, 2, 3)$ du tétraèdre de référence ou le point de paramètre nul de la cubique gauche. Ce point peut être évidemment un point quelconque de la courbe. Donc F_4 est une surface réglée, et, par suite, elle est du quatrième ordre.

On pouvait prévoir que l'enveloppe cherchée serait une surface réglée en se reportant à l'équation

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0$$

qui, pour chaque valeur de θ_3, donne une involution de points θ_1 et θ_2. Les droites qui joignent ces couples de points engendrent un système réglé et sont projetées du point θ_3 suivant un faisceau de plans; l'axe de ce faisceau est une génératrice rectiligne de l'enveloppe cherchée F_4.

Nous pouvons obtenir les plans tangents doubles de F_4 ou les plans des sections doublement quadrillées de la surface initiale donnée S_4. Si u est un de ces plans, il présente la liaison

$$M\theta_3^2 + N\theta_3 + P = 0$$

avec *deux* des points où il coupe la cubique; donc cette équation et la suivante,

$$u_1\theta_3^3 + u_2\theta_3^2 + u_3\theta_3 + u_4 = 0,$$

ont *deux* racines communes, ce qui s'exprime par l'évanouissement d'une matrice à quatre colonnes et trois lignes; en chassant, comme précédemment, le dénominateur u_1, on obtient

$$\left\|\begin{matrix} . & Mu_1 & (Nu_1) & (Pu_1) \\ M & (Nu_1) & (Pu_1) & \ldots\ldots \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix}\right\| = 0.$$

Ceci représente la développable circonscrite partielle à deux surfaces de seconde classe

$$\left|\begin{matrix} . & Mu_1 & (Nu_1) \\ M & (Nu_1) & (Pu_1) \\ 1 & u_2 & u_3 \end{matrix}\right| = 0, \qquad \left|\begin{matrix} . & Mu_1 & (Pu_1) \\ M & (Nu_1) & \ldots\ldots \\ 1 & u_2 & u_4 \end{matrix}\right| = 0,$$

qui ont encore en commun le faisceau de plans tangents

$$\left\|\begin{matrix} . & M & 1 \\ Mu_1 & (Nu_1) & u_2 \end{matrix}\right\| = 0.$$

La développable des plans bitangents de F_4 est donc de troisième classe; c'est la développable osculatrice d'une cubique gauche.

Ainsi, *l'enveloppe des sections quadrillées d'une surface* S_4 *de quatrième ordre à cubique double est une surface de quatrième classe* F_4, *ayant une développable bitangente de troisième classe.*

16. Quand une surface réglée de quatrième classe a une développable bitangente de troisième classe, elle a, soit une cubique double, soit une droite triple. Il faut

examiner lequel de ces deux cas se présente ici : la théorie de l'élimination va nous fournir encore la réponse à cette question.

Remarquons que, si θ_3 désigne un point fixe de la cubique gauche, double sur S_4, l'équation

$$M u_1 \theta_3^2 + (N u_1)\theta_3 + (P u_1) = 0$$

ou

$$(a_{22} - a_{13}) u_1 \theta_3^2 - (a_{12} u_1 + a_{13} u_2 + a_{23} u_3 + a_{33} u_4)\theta_3$$
$$+ a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{22} u_3 + a_{23} u_4 = 0$$

est celle d'un point y; tout plan u qui passe par ce point et par le point θ_3 est tangent à la surface F_4; la droite qui joint ce point y au point θ_3 de la cubique gauche est une génératrice de F_4. Un point x quelconque de cette génératrice est donné par les relations

$$y_i = \lambda x_i + \mu \theta_3^{4-i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} (a_{22} - a_{13})\theta_3^2 - a_{12}\theta_3 + a_{11} &= \lambda x_1 + \mu\theta_3^3, \\ - a_{13}\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 + \mu\theta_3^2, \\ - a_{23}\theta_3 + a_{22} &= \lambda x_3 + \mu\theta_3, \\ - a_{33}\theta_3 + a_{23} &= \lambda x_4 + \mu. \end{aligned}$$

En éliminant λ, μ, θ_3, on a l'équation ponctuelle de F_4. Éliminons d'abord μ : multiplions chacune des trois dernières relations par θ_3 et retranchons chaque fois de la précédente

$$\begin{aligned} a_{22}\theta_3^2 - \quad 2a_{12}\theta_3 \quad + a_{11} &= \lambda x_1 - \lambda\theta_3 x_2, \\ a_{23}\theta_3^2 - (a_{13} + a_{22})\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 - \lambda\theta_3 x_3, \\ a_{33}\theta_3^2 - \quad 2a_{23}\theta_3 \quad + a_{22} &= \lambda x_3 - \lambda\theta_3 x_4. \end{aligned}$$

Il faudrait encore éliminer λ et θ_3 ; mais ce calcul est superflu : nous ne cherchons que les points triples de F_4, s'il y en a ; à cet effet, nous devons écrire les conditions pour que les trois dernières égalités soient satisfaites par *trois* systèmes de valeurs déterminées de λ et θ_3.

Or ces égalités sont, dans un plan rapporté à des axes cartésiens λ et θ_3, les équations de trois hyperboles ayant l'axe des θ_3 comme direction asymptotique commune.

Pour que ces courbes aient trois points communs à distance finie, il faut qu'elles forment faisceau ou que l'on ait

$$\left\Vert \begin{matrix} a_{22} & a_{12} & a_{11} & x_1 & x_2 \\ a_{23} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{12} & x_2 & x_3 \\ a_{33} & a_{23} & a_{22} & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\Vert = 0.$$

En général, ces relations sont incompatibles. Mais elles représentent une droite quand on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est donc la condition pour que la surface F_4 ait une droite triple. Elle exprime, entre la surface donnée S_4 et sa cubique double, une relation invariante qu'il faut interpréter.

L'équation de S_4 étant, symboliquement,

$$a_x^2 \equiv (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3)^2 = 0,$$

un quelconque de ses points, x, est aligné sur deux points θ et θ' de la cubique double, et l'on a successivement

$$x_i = h\theta^{4-i} + k\theta'^{4-i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\begin{aligned} X_1 &= (h\theta^2 + k\theta'^2)(h+k) - (h\theta + k\theta')^2 \\ &= hk(\theta - \theta')^2, \\ X_2 &= (h\theta^2 + k\theta'^2)(h\theta + k\theta') - (h\theta^3 + k\theta'^3)(h+k) \\ &= -hk(\theta - \theta')^2(\theta + \theta'), \\ X_3 &= (h\theta^3 + k\theta'^3)(h\theta + k\theta') - (h\theta^2 + k\theta'^2)^2 \\ &= hk(\theta - \theta')^2\theta\theta', \end{aligned}$$

$$a_X^2 = [a_1 - a_2(\theta + \theta') + a_3\theta\theta']^2 = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à θ, sous forme non symbolique,

$$\theta^2(a_{22} - 2a_{23}\theta' + a_{33}\theta'^2) - 2\theta[a_{12} - (a_{22} + a_{13})\theta' + a_{23}\theta'] \\ + (a_{11} - 2a_{12}\theta' + a_{22}\theta'^2) = 0.$$

Telle est la relation entre deux points θ et θ' de la cubique double situés sur une même génératrice de S_4. Elle fait correspondre, à tout point θ, deux points θ'; à l'un de ces points θ' répond, outre le point de départ θ, un nouveau point θ''; à celui-ci un quatrième point θ''', etc.

Si le quatrième point de cette série coïncide avec le premier, la surface S_4 est *spéciale,* en ce sens que ses génératrices s'appuient toutes sur une même droite; alors il y a ∞^1 *triangles de Poncelet* inscrits au cône qui projette la cubique d'un de ses points et circonscrits au cône de même sommet et tangent à S_4; on sait que ces deux cônes sont quadratiques.

Mais, pour que ces deux cônes présentent, non des triangles, mais des *quadrilatères de Poncelet,* en d'autres termes, pour que le cinquième point de la série θ, θ', θ'', θ''', ... coïncide avec le premier, ou encore que les génératrices de S_4 s'arrangent en quadrilatères inscrits à la cubique gauche, il faut que la dernière relation écrite donne, pour deux valeurs (θ et θ'') attribuées à θ, le même couple de valeurs de θ' (θ' et θ''').

Nous sommes donc ramené au problème d'algèbre qui résout la question des *quadrangles de Steiner* dans la quartique plane binodale, avec cette particularité que la relation entre θ et θ' est symétrique. Le raisonnement fait, au début de notre étude, montre que ces quadrilatères de Poncelet existent si l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément la condition trouvée ci-dessus pour l'existence d'une droite triple sur la surface F_4.

Dans toute surface du quatrième ordre à cubique double, les plans des sections quadrillées enveloppent une autre surface du quatrième ordre douée, en général, d'une cubique gauche double, et exceptionnellement d'une droite triple. Ce dernier cas se réalise quand les génératrices de la surface donnée sont les côtés d'une infinité simple de quadrilatères gauches inscrits dans la cubique donnée.

Observons que le raisonnement précédent ramène toujours le problème des *polygones de Poncelet* de $2n$ côtés pour deux coniques à un cas particulier du problème des *polygones de Steiner* de $2n$ côtés pour une quartique plane binodale.

17. Si l'on demande une section plane de S_4 qui soit triplement quadrillée, il faut trouver un plan u qui possède la relation

$$M\theta^2 + N\theta + P = 0$$

avec trois points θ de la cubique; cette équation du second degré ayant trois racines, tous ses coefficients sont nuls,

$$\mathrm{M} = a_{22} - a_{13} = 0,$$

$$\mathrm{N}\,u_1 = -(a_{12}u_1 + a_{13}u_2 + a_{23}u_3 + a_{33}u_4) = 0,$$

$$\mathrm{P}\,u_1 = \quad a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4 \ = 0.$$

La première relation est indépendante de u. Elle n'est vérifiée que si le cône circonscrit à S_4 et de sommet $(1, 2, 3)$ est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à la cubique double. Car les équations tangentielles de ces cônes s'écrivent facilement

$$a_v^2 = (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3)^2 = 0, \qquad v_2^2 - 4 v_1 v_3 = 0,$$

et leur invariant simultané contenant au premier degré les coefficients du premier est

$$2(a_{22} - a_{13}).$$

L'évanouissement de cet invariant est incompatible avec la condition d'une droite triple sur F_4, car si, dans cette condition (*voir* numéro précédent), on remplace a_{22} par a_{13}, on trouve que le discriminant de la forme a_x^2 s'annule, et alors la surface donnée S_4 dégénère en deux quadriques.

Quand donc la condition $a_{22} = a_{13}$ est vérifiée, la surface F_4 a un faisceau de plans tangents triples et c'est une surface du quatrième ordre à cubique double, mais spéciale.

Lorsque le cône circonscrit à la surface donnée S_4 *et ayant son sommet sur la cubique double est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à cette cubique, l'enveloppe des sections planes* *quadrillées de* S_4 *est une surface* F_4 *engendrée par les cordes d'une seconde cubique gauche qui s'appuient sur une droite fixe. Les plans passant par cette droite sont les sections triplement quadrillées de* S_4.