

Sur un lieu connu

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 471-474

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_471_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'17a]

SUR UN LIEU CONNU;

PAR UN ABONNÉ.

Par deux points fixes A et B pris sur une conique donnée, on fait passer une circonférence variable, puis l'on mène à ces deux courbes deux tangentes communes, telles que les cordes de contact passent par le point de rencontre de AB avec la sécante commune associée ⁽¹⁾; trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes? (CHASLES.)

Le cas particulier où les points A et B sont confondus a été proposé au Concours général en 1844 (*Nouv. Ann.*, 1844, p. 426, 431, 489).

Gérono, après avoir donné une solution géométrique (*Ibid.*, p. 495), a ramené géométriquement le cas général au cas particulier en montrant que le lieu reste le même si la corde AB se déplace parallèlement à elle-même (*Ibid.*, 1851, p. 408). Breton (de Champ) a résolu la question en considérant le point dont on cherche le lieu comme un centre d'homologie: il a remarqué que le problème peut s'étendre à l'espace, en remplaçant la conique et le couple de points par une

(¹) La restriction essentielle indiquée ici est souvent omise dans l'énoncé: si on ne la fait pas, le lieu se compose d'une conique et d'une courbe du quatrième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 122). Si la circonférence variable est remplacée par une conique variable passant par quatre points fixes *quelconques*, le lieu est une courbe du sixième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 184. Note de M. Darboux).

quadrique et une section circulaire (*Ibid.*, 1852, p. 62 et 375).

Plusieurs solutions analytiques ont été données (1863, p. 481; 1864, p. 49; 1873, p. 23; 1880, p. 91). Elles ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres, et celle qu'on va lire est empruntée au même fond d'idées que ses devancières.

Soit la conique S, dont l'équation est $f(x, y) = 0$, les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de la conique S; soit la conique T doublement tangente à la première, et qui sera formée par la suite des deux tangentes communes considérées dans l'énoncé

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0;$$

soit le cercle C, doublement tangent à la conique T,

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 + (px + qy + r)^2 = 0,$$

avec deux conditions dont nous n'écrirons pour le moment que la première,

$$(1) \quad pq = \lambda\mu;$$

les cordes communes à la conique S et au cercle C qui passent au point de rencontre des cordes de contact avec T sont

$$(px - qy - r)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0,$$

et leurs coefficients angulaires seront m et $-m$ si l'on a

$$(2) \quad (p + qm)^2 - (\lambda + \mu m)^2 = 0,$$

le terme du premier degré en m disparaissant *a priori* en vertu de (1).

Les relations (1) et (2) déterminent p et q ; il suffit

de prendre

$$\begin{aligned} p + qm &= \lambda + \mu m, \\ p \times qm &= \lambda \times \mu m; \end{aligned}$$

laissant de côté la solution illusoire $p = \lambda$, $q = \mu$, où m n'entre pas, on a la solution

$$p = \mu m, \quad qm = \lambda.$$

Si l'on achève d'écrire que la conique C est un cercle en supposant

$$f(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + \dots,$$

on a la condition

$$k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2) + (p^2 - q^2) = 0,$$

ou, d'après les expressions trouvées pour p et q ,

$$(3) \quad \frac{m^2}{m^2 + 1} k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2 m^2) = 0.$$

Si maintenant la conique T est formée des deux tangentes menées à la conique S par un point I de coordonnées α , β , on a

$$k = f(\alpha, \beta), \quad \lambda = f'_x, \quad \mu = f'_y,$$

et le lieu du point I est la conique représentée par l'équation

$$(4) \quad \frac{4m^2(A - C)}{m^2 + 1} f(x, y) - (f'_x{}^2 - m^2 f'_y{}^2) = 0;$$

cette conique passe aux quatre points de la conique S dont les tangentes ont pour coefficients angulaires m et $-m$.

Si l'on prend l'équation de la conique S sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation du lieu prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2 m^2 - b^2},$$

où l'on reconnaît une conique homofocale à la conique donnée.

Le lieu ne dépend que de la direction de la corde AB, et non de sa position.